А. Блинков

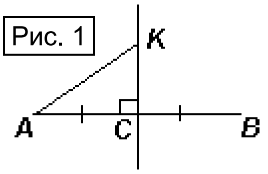
Расстояния на прямой и не только

На этом занятии я постараюсь вам показать, что математика – единая наука, которая не делится на алгебру и геометрию (в отличие от школьных предметов). Мы рассмотрим ряд задач, которые принято относить к алгебре, и увидим, что для решения этих задач наиболее эффективными оказываются методы геометрии. При этом вам потребуется не только слушать, но и самим решать задачи.

Существует еще много задач, в решении которых используются различные геометрические соображения, но сегодня для нас основным будет понятие расстояния.

1. Начнем с очень простого практического вопроса: где надо вырыть колодец, чтобы расстояние до него от двух домов было одинаковым? Естественный ответ: в середине отрезка, соединяющего эти дома. Формально этот ответ не совсем точен, так как ***геометрическим местом точек на плоскости, равноудаленных от двух данных является серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему эти точки***. Но с точки зрения здравого смысла из всех таких точек разумно выбрать ту, для которой требуемые расстояния не только равны, но являются и наименьшими из возможных. Действительно, если K – произвольная точка серединного перпендикуляра к отрезку AB, а C – середина этого отрезка, то $KA > CA$, так как в прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета (см. рис. 1).

Рис. 1



Эта несложная задача дает «ключ» к решению некоторых уравнений, содержащих модуль числа.

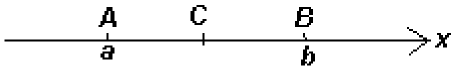
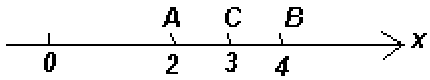


Рис. 2

Вспомните: а) Что такое модуль числа? [***Модулем числа х называется расстояние на координатной прямой от точки с координатой х до нуля***.] б) Как вычисляется расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ на координатной прямой? [$\boldsymbol{AB = |a - b|}$ (см. рис. 2)] в) Как найти координаты середины отрезка AB? [Середина $\boldsymbol{C}$ отрезка $\boldsymbol{AB}$ имеет координату $c = \dfrac{a+b}{2}$ (см. рис. 2)]

Доказать формулу пункта б) можно, рассмотрев различные случаи расположения этих точек по отношению к друг другу и точке O(0), а формула пункта в) следует из нее, если записать равенство AC = BC.

Рис. 3



Пример 1. Решите уравнение: $|x - 2| = |x - 4|$.

Решение. Условие означает, что надо найти на координатной прямой точку, которая равноудалена от точек $A(2)$ и $B(4)$. Понятно, что это середина отрезка AB, то есть $C(3)$. Следовательно, решением уравнения является $\boldsymbol{x = 3}$ (см. рис. 3).

Более того, с той же легкостью можно решать и некоторые неравенства.

Пример 2. Решите неравенство: $|x + 1| \geq |7 - x|$.

Решение. Из определения модуля следует, что ***модули противоположных чисел равны***, а для того, чтобы использовать формулу расстояния между точками, под знаком модуля должна стоять разность координат. Поэтому, данное неравенство удобно переписать в таком виде: $|x - (-1)| \geq |x - 7|$. Тогда его решением будут все точки координатной прямой, для которых расстояние до $A(-1)$ не меньше, чем расстояние до $B(7)$. Понятно, что этим свойством обладает точка $C(3)$ – середина отрезка AB, а также все точки лежащие правее точки C (см. рис. 4). Таким образом, решением неравенства являются все числа, большие или равные трем, то есть $\boldsymbol{x \geq 3}$, которые обычно записывают в виде промежутка $\boldsymbol{[3; +\infty)}$.

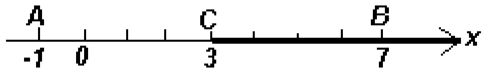


Рис. 4

Задача 1. Решите уравнение или неравенство: а) $|x| = |x - 3|$; б) $|5 + x| \leq |5 - x|$.

Ответ: а) 1,5; б) $(-\infty; 0]$.

2. Переформулируем исходную задачу. Пусть колодец требуется вырыть так, чтобы сумма расстояний от него до двух домов была наименьшей. Интуиция подсказывает, что колодец надо строить на отрезке, соединяющем эти дома, но в какой точке? Оказывается, что в любой точке этого отрезка! Действительно, ***какую бы точку M на отрезке AB мы не выбрали, сумма расстояний от нее до концов отрезка одна и та же, и она равна длине отрезка AB***.

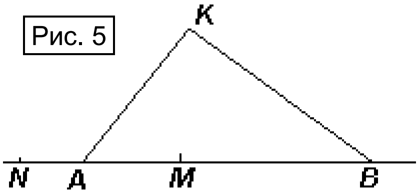


Рис. 5

Если же выбрать произвольную точку N на прямой AB вне отрезка, то сумма расстояний от нее до точек A и B, очевидно, будет больше, чем длина AB. Аналогично, если точка K не лежит на прямой AB, то $K\grave{A} + KB > AB$ по неравенству треугольника (см. рис. 5).

Полученный факт позволяет решать простейшие задачи о сумме двух модулей.

Пример 3. Найдите наименьшее значение выражения $|x + 4| + |x – 2|$.

Решение. Рассмотрим на координатной прямой точки A(–4) и B(2) и найдем такие точки, сумма расстояний от которых до точек A и B наименьшая. Эти точки, как было доказано, лежат на отрезке AB, а искомая сумма равна длине отрезка AB, то есть равна **6** (см. рис. 6).

Рис. 6

Пример 4. Решите уравнение: $|x + 4| + |x – 2| = 10$.

Решение. Это означает, что на координатной прямой надо искать точки, сумма расстояний от которых до точек A(–4) и B(2) равна 10. Понятно, что на отрезке AB они лежать не могут, иначе эта сумма была бы равна 6, значит, они лежат вне этого отрезка. Искать их можно, например, так: заметим, что для любой точки N, лежащей на координатной прямой вне отрезка, сумма $NA + NB = 2NC$, где $C(–1)$ – середина отрезка AB (*почему*?).

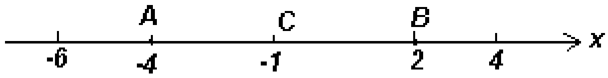


Рис. 7

Таким образом, искомые точки удалены от точки $C(–1)$ на расстояние 5. Получим, что решением уравнения являются два числа: **4** и **–6** (см. рис. 7).

Аналогично можно решать и неравенства, в частности, из предыдущих рассуждений следует, что решением неравенства $|x + 4| + |x – 2| > 10$ является объединение двух промежутков: $(–\infty; –6) \cup (4; +\infty)$.

Задача 2. Найдите наименьшее значение выражения $|a – 100| + |100 + a|$.

Ответ: 200.

Задача 3. Решите уравнения или неравенства: а) $|x – 1| + |x – 2| = 3$; б) $|x – 1| + |x – 2| < 3$; в) $|x| + |1 + x| = 1$; г) $|x| + |1 + x| \geq 1$; д) $|6 + x| + |6 – x| = 8$.

Ответ: а) 0; 3; б) (0; 3); в) [–1; 0]; г) $(–\infty; +\infty)$; д) решений нет.

3. Усложним задачу. Пусть теперь вдоль прямой дороги стоят семь домов, причем расстояния между соседними домами не обязательно одинаковы. В какой точке дороги надо вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до всех домов была наименьшей?

Обозначим дома по порядку точками A_1, A_2, ..., A_6, A_7 на прямой, а искомую точку – через X (см. рис. 8). Для того, чтобы сумма $XA_1 + XA_7$ была наименьшей точка X должна находится на отрезке A_1A_7. Сумма $XA_2 + XA_6$ – наименьшая, если точка X лежит на отрезке A_2A_6, а сумма $XA_3 + XA_5$ – наименьшая, если X лежит на отрезке A_3A_5. Следовательно, сумма $XA_1 + XA_2 + XA_3 + XA_5 + XA_6 + XA_7$ – наименьшая, если точка X принадлежит всем трем отрезкам, то есть лежит на отрезке A_3A_5. Осталось сделать наименьшим расстояние от X до A_4. Понятно, что это произойдет в том случае, если эти точки совпадают. Таким образом, колодец надо строить около четвертого дома, причем полученный результат никак не зависит от расстояний между соседними домами!

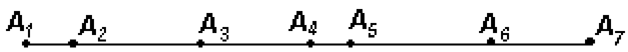


Рис. 8

Задача 4. Ответьте на вопрос задачи, если вдоль дороги расположены 10 домов.

Ответ: в любой точке отрезка, соединяющего пятый и шестой дом.

Задача 5. Где надо построить колодец, если в деревне – 4 дома, которые расположены в вершинах выпуклого четырехугольника?

Ответ: в точке пересечения диагоналей четырехугольника.

Задача 6. Найдите наименьшее возможное значение сумм:
а) $|x – 1| + |x – 2| + ... + |x – 11|$; б) $|a| + |a + 1| + |a + 2| + ... + |a + 100|$.

Ответ: а) 30; б) 2550.

4. Следующая задача взята из замечательной книжки *Р. Хонсбергера* «Математические изюминки».

Пример 5. В Нью-Йорке шахматных мастеров больше, чем на всей остальной территории США. Планируется провести шахматный турнир с участием всех мастеров. Решено, что турнир будет проведен в таком месте, чтобы сумма расстояний всех переездов была наименьшей. Нью-Йоркские мастера считают, что этому критерию удовлетворяет их город, а мастера с Западного побережья настаивают на том, что турнир надо проводить в городе, который является «центром тяжести» всей совокупности мест, в которых живут шахматисты. Кто из них прав?

Решение. Оказывается, правы мастера из Нью-Йорка! Докажем это. Рассмотрим всех мастеров, живущих не в Нью-Йорке, и каждому из них дадим в пару какого-то из шахматистов Нью-Йорка. Для каждой такой пары сумма переездов будет наименьшей, если турнир проводить в городе, лежащем в любой точке отрезка *MN*, где *M* – место жительства выбранного шахматиста, а *N* – Нью-Йорк. Значит, искомая сумма расстояний не меньше, чем сумма длин всех таких отрезков. Эти отрезки имеют единственное пересечение – точку *N*, поэтому, для всех уже рассмотренных шахматистов искомая сумма наименьшая, если турнир проводить в *N*. Остались не рассмотренными только те мастера из Нью-Йорка, которым не хватило пары, но для них проведение турнира в Нью-Йорке также оптимально.

Задача 7. Расстояние между деревнями *A* и *B* равно 3 км. В деревне *A* живут 300 школьников, а в деревне *B* – 200 школьников. В каком месте надо построить школу, чтобы сумма всех расстояний пройденных школьниками по дороге в школу была наименьшей?

Ответ: в деревне *A*.

Решение. Пусть школа построена в какой-то точке *C* отрезка *AB*. Независимо от расположения точки *C*, сумма расстояний *AC* и *BC* равна *AB,* то есть 3 км. Поэтому, для каждой пары школьников, живущих в разных деревнях, сумма пройденных расстояний до школы равна 3 км. Таких пар школьников – 200, значит, искомая сумма расстояний будет наименьшей, если для остальных ста школьников, живущих в деревне *A*, сумма расстояний до школы будет наименьшей. Следовательно, точка *C* должна совпасть с точкой *A*.

Это решение можно оформить алгебраически. Пусть x км – расстояние от школы до деревни A, тогда (3 – x) км – расстояние от школы до B. Искомая сумма: $S = 300x + 200(3 – x) = 100x + 600$ *будет наименьшей, если* $x = 0$.

Задача 8. Найдите наименьшее значение выражений:
а) $3|x – 2| + 2|x – 5|$; б) $|8x + 40| + |5x + 40|$.

Ответ: а) 6; б) 15..

Решение. а) Рассмотрим на координатной прямой точки $A(2)$ и $B(5)$. При любом расположении точки $C(x)$ на отрезке *AB* значение выражения $2(|x – 2| + |x – 5|)$ одно и то же. Следовательно, данное выражение принимает наименьшее значение, если значение $|x – 2|$ является наименьшим, а это происходит при $x = 2$; б) задача практически сводится к предыдущей после преобразования: $|8x + 40| + |5x + 40| = 8|x + 5| + 5|x + 8|$.

5. А вот еще одна, достаточно трудная, задача.

Пример 6. (*ММО, 1986, 7.3*). Три гнома живут в разных домах на плоскости и ходят со скоростями 1 км/ч, 2 км/ч и 3 км/ч соответственно. Какое место для ежедневных встреч им надо выбрать, чтобы сумма времён, необходимых каждому из гномов на путь от своего дома до этого места (по прямой), была наименьшей?

Авторское решение опирается на составление систем неравенств с несколькими переменными. Мы же поступим иначе.

Заметим, что на любой путь *S* по прямой один гном, идущий со скоростью *V* км/ч, затратит столько же времени, сколько в сумме затратят *n* гномов, идущих со скоростями в *n* раз больше (так как $t = \frac{S}{V} = n \cdot \frac{S}{nV}$).

Поэтому можно переформулировать задачу следующим образом: пусть скорости всех гномов одинаковы и равны 6 км/ч, но в первом доме живут 6 гномов, во втором – 3, а в третьем – 2. При постоянной скорости пройденное расстояние пропорционально затраченному времени, поэтому ответ в задаче не изменится, если искать точку, для которой ***сумма расстояний***, пройденных всеми гномами, будет наименьшей. Тогда, так 6 > 3 + 2, то задача становится аналогичной задаче о шахматистах и мы получим, что встречаться надо в доме первого гнома!

Задача 9. Три сталкера дошли до Каменной аномалии. Оттуда к кладу ведет прямая тропа длиной 100 метров. Сталкеры знают, что первый пошедший по тропе окаменеет в произвольном месте и такая же участь ждет второго. Они оба оживут в тот момент, когда по тропе будет идти третий и суммарное расстояние от него до двух окаменевших спутников будет в точности равно 100 м. Смогут ли все сталкеры добраться до клада без риска окаменеть навсегда?

Ответ: да, смогут.

Решение. Рассмотрим середину *C* отрезка тропы между двумя окаменевшими сталкерами *A* и *B*. Независимо от расположения точки *C*, на отрезке [0; 100] найдется такая точка *M*, что *CM* = 50 (м). Тогда *MA* + *MB* = 100 (м). Следовательно, сталкеры *A* и *B* оживут в тот момент, когда третий окажется в точке *M*.