Южно-Российская математическая олимпиада «Ассара»
Сириус, 10-13 ноября 2022 года.

Младшие. День 2.
12 ноября 2022 года.

5. Найдите все пары простых чисел p, q такие, что число $pq + p - 6$ также простое.

6. Клетки таблицы 9×9 раскрашены в черный и белый цвета. Оказалось, что нашлось k строк, в каждой из которых чёрных клеток больше чем белых, и нашлось k столбцов, в каждом из которых белых клеток больше чем чёрных. При каком наибольшем k это возможно?

7. Выясните, какое из двух чисел больше:

$$\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{\ddots+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2}}}}} \quad \text{или} \quad \cfrac{3}{3+\cfrac{3}{3+\cfrac{3}{\ddots+\cfrac{3}{3+\cfrac{3}{3}}}}} \quad ?$$

(В каждом выражении по 2022 знака дроби.)

8. Про выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ известно, что $AB = BC = CD = DE = EF = FA$ и $AD = BE = CF$. Докажите, что диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке.

Время на работу $3\frac{1}{2}$ часа.
Каждая задача оценивается из 7 баллов.

Южно-Российская
математическая олимпиада «Ассара»
Сириус, 10-13 ноября 2022 года.

Старшие. День 2.
12 ноября 2022 года.

5. Выясните, какое из двух чисел больше:

$$\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{\ddots+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2}}}}} \quad \text{или} \quad \cfrac{3}{3+\cfrac{3}{3+\cfrac{3}{\ddots+\cfrac{3}{3+\cfrac{3}{3}}}}} \quad ?$$

(В каждом выражении по 2022 знака дроби.)

6. По кругу расставлены 2022 числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{2022}. Оказалось, что для любых трёх последовательных a_i, a_{i+1}, a_{i+2} выполняется равенство $a_i = \sqrt{2}a_{i+2} - \sqrt{3}a_{i+1}$. Докажите, что $\sum_{i=1}^{2022} a_i a_{i+2} = 0$. Мы считаем, что $a_{2023} = a_1$, $a_{2024} = a_2$.

7. В кубе $7\times7\times7$ единичные кубики раскрашены в белый, черный и серый цвета так, что для любых двух цветов количества кубиков этих двух цветов различны. При этом нашлось N параллельных рядов из 7 кубиков, в каждом из которых белых кубиков больше чем серых и чем черных. Аналогично, нашлось N параллельных рядов из 7 кубиков, в каждом из которых серых кубиков больше чем белых и чем черных, а также нашлось N параллельных рядов из 7 кубиков, в каждом из которых черных кубиков больше чем белых и чем серых. При каком наибольшем N это возможно?

8. В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. Пусть X — точка, симметричная точке C относительно прямой AD, Y — точка, симметричная точке C относительно точки D, а M — точка пересечения AC и BD. Оказалось, что окружности, описанные около треугольников BMC и AXY, касаются внутренним образом. Докажите, что $AM = AB$.

Время на работу 4 часа.
Каждая задача оценивается из 7 баллов.