III Южно-Российская
математическая олимпиада «Ассара»
Майкоп, 11-15 октября 2024 года.

Младшие. День 1.
12 октября 2024 года.

1. Есть набор из 50 карточек. Каждая карточка с двух сторон окрашена в один из трёх цветов — красный, синий или белый, причем для каждой карточки её две стороны окрашены в разные цвета. Карточки выложили на стол. Карточка *лежит красиво*, если выполнено хотя бы одно из двух условий: её верхняя сторона — красная; её нижняя сторона — синяя. Оказалось, что ровно 25 карточек лежат красиво. Затем все карточки перевернули. Теперь на столе некоторые карточки лежат красиво. Сколько их может быть?

2. Пусть p — простое число. Натуральные числа a и b таковы, что $\frac{p}{a}+\frac{p}{b}=1$, а число $a+b$ делится на p. Какие значения может принимать выражение $\frac{a+b}{p}$?

3. В клетках таблицы $4 \times N$ написаны целые числа, по модулю не превосходящие 2024 (т.е. числа из множества $\{-2024, -2023, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, 2024\}$) так, что в каждой из четырёх строк нет двух равных чисел. При каком наибольшем N могло так оказаться, что в каждом столбце сумма чисел равна 2?

4. Существует ли описанный n-угольник, в котором каждая сторона длиннее диаметра вписанной окружности а) при $n=4$? б) при $n=7$? в) при $n=6$?

Время на работу $3\frac{1}{2}$ часа.
Каждая задача оценивается из 7 баллов.

III Южно-Российская
математическая олимпиада «Ассара»
Майкоп, 11-15 октября 2024 года.

Старшие. День 1.
12 октября 2024 года.

1. Есть набор из 2024 карточек. Каждая карточка с двух сторон окрашена в один из трёх цветов — красный, синий или белый, причем для каждой карточки её две стороны окрашены в разные цвета. Карточки выложили на стол. Карточка *лежит красиво*, если выполнено хотя бы одно из двух условий: её верхняя сторона — красная; её нижняя сторона — синяя. Оказалось, что ровно 150 карточек лежат красиво. Затем все карточки перевернули. Теперь на столе некоторые карточки лежат красиво. Сколько их может быть?

2. Докажите, что в любом описанном 8-угольнике найдётся сторона, по длине не превосходящая диаметра вписанной окружности.

3. В клетках таблицы $4 \times N$ написаны целые числа, по модулю не превосходящие 2024 (т.е. числа из множества $\{-2024, -2023, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, 2024\}$) так, что в каждой из четырёх строк нет двух равных чисел. При каком наибольшем N могло так оказаться, что в каждом столбце сумма чисел равна 23?

4. На координатной плоскости нарисована парабола p — график уравнения $y = -x^2$, и отмечена точка A, не лежащая на параболе p. Через точку A проводятся всевозможные параболы q вида $y = x^2 + ax + b$, пересекающие p в двух точках X и Y. Докажите, что всевозможные прямые XY проходят через фиксированную точку плоскости.

Время на работу 4 часа.
Каждая задача оценивается из 7 баллов.