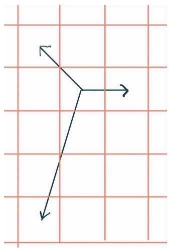
III Южно-Российская математическая олимпиада «Ассара»
Майкоп, 11-15 октября 2024 года.

Младшие. День 2.
13 октября 2024 года.

5. Докажите, что 2024! делится а) на 2024^2; б) на 2024^8.
Напомним, что $n!$ при натуральном n равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

6. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ на диагонали AD отметили точку X такую, что $\angle AEX = 65^\circ$. Чему равна градусная мера угла $\angle XCD$?

7. На клетчатой доске в одной из клеток стоит фишка. За один ход она умеет перемещаться либо на 1 клетку вправо, либо по диагонали на 1 влево и 1 вверх, либо на 1 влево и 3 вниз (см. рис.). Фишка сделала n ходов и вернулась в начальную клетку. Докажите, что а) n делится на 2, б) n делится на 8.



8. Дано множество S из 2024 натуральных чисел, удовлетворяющее такому условию: если выбрать любые 10 (различных) чисел из S, то можно выбрать ещё одно число из S так, чтобы сумма всех 11 выбранных чисел делилась на 10. Докажите, что из S можно выбросить одно из чисел так, чтобы полученное множество S' из 2023 чисел стало удовлетворять условию: если выбрать любые 9 (различных) чисел из S', то можно выбрать ещё одно число из S' так, чтобы сумма всех 10 выбранных чисел делилась на 10.

Время на работу $3\frac{1}{2}$ часа.
Каждая задача оценивается из 7 баллов.

III Южно-Российская
математическая олимпиада «Ассара»
Майкоп, 11-15 октября 2024 года.

Старшие. День 2.
13 октября 2024 года.

5. Докажите, что

$$(100!)^{99} > (99!)^{100} > (100!)^{98}.$$

Напомним, что $n!$ при натуральном n равно $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

6. На прямой отмечены точки A, B, C, D именно в таком порядке. Окружность ω_1 проходит через точки A и C, а окружность ω_2 проходит через точки B и D. На окружности ω_2 отмечена точка E так, что $AB = BE$, а на окружности ω_1 отмечена точка F так, что $CD = CF$. Прямая AE пересекает окружность ω_2 вторично в точке X, а прямая DF — окружность ω_1 в точке Y. Докажите, что прямые XY и AD перпендикулярны.

7. Найдите все натуральные n, для которых верно такое утверждение: «Если натуральные числа a, b, c таковы, что каждое из чисел

$$a^2 + 2ab + b^2, \quad b^2 + 2bc + c^2, \quad c^2 + 2ac + a^2$$

делится на n, то и $(a+b+c)^2$ делится на n».

8. В классе 15 мальчиков и 15 девочек. Первая девочка дружит с 4 мальчиками, вторая — с 5-ю, третья — с 6-ю, …, 11-ая — с 14-ю, а каждая из остальных четырех девочек дружит со всеми мальчиками. Оказалось, что существует ровно $3 \cdot 2^{25}$ способов разбить весь класс на пары, так чтобы в каждой паре были мальчик и девочка, которые дружат. Докажите, что любой из друзей первой девочки дружит и со всеми остальными девочками тоже.

Время на работу 4 часа.
Каждая задача оценивается из 7 баллов.