Всероссийская ассоциация учителей математики
Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета
Московский центр непрерывного математического образования
Центр педагогического мастерства города Москвы
Республиканская естественно-математическая школа

IV конкурс учителей математики Юга России

Майкоп, Республика Адыгея, 23 октября 2021 года

Ответы, решения, комментарии, критерии проверки

Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов

I. Решите задачи.

№1. Производительность. Фирма, состоящая из нескольких рабочих и бригадира, производит сувениры. В течение дня каждый рабочий делал по одинаковому целому количеству сувениров, а бригадир – также целое количество, которое на 13 больше, чем средняя дневная производительность фирмы. Сколько рабочих в фирме?

Фольклор

Ответ: 13.

Решение. Первый способ. Пусть в конце рабочего дня бригадир поровну раздаст рабочим «лишние» сувениры так, чтобы у всех стало поровну. Так как и каждый рабочий сделал целое число сувениров, и средняя производительность фирмы – целое число (оно на 13 отличается от целого числа сувениров, изготовленных бригадиром), то каждый получит целое число сувениров. Разделить 13 сувениров поровну можно либо раздав их по одному 13 рабочим, либо отдав все 13 сувениров единственному рабочему. По условию рабочих несколько, поэтому второй случай исключён.

Второй способ. Пусть каждый из n рабочих изготовляет в день по x сувениров, а бригадир – y. По условию: $y = \frac{xn + y}{n + 1} + 13$. Отсюда, выразив y, получим: $y = x + 13 + \frac{13}{n}$. Так как 13 – простое число, а $n > 1$, то $n = 13$.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные пробелы или неточности – 7-8 баллов

Верно составлено уравнение с несколькими переменными (см. второй способ), но дальнейших продвижений нет или в них допущены ошибки – 3 балла

Приведен только верный ответ – 1 балл

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№2. Функции. Существуют ли две функции с наименьшим положительным периодом 2 такие, что их произведение и частное имеют наименьший положительный период 1?

А. Блинков

Ответ: существуют.

Решение. Рассмотрим, например, функции $\sin\pi x$ и $\cos\pi x$. Используем известный факт: если функция $f(x)$ имеет наименьший положительный период T, то у функции $f(kx)$, где $k \neq 0$, наименьший положительный период равен $\frac{T}{k}$. Следовательно, у каждой из рассмотренных функций наименьший положительный период равен 2. Их произведение равно $0,5\sin 2\pi x$, а частное равно $\mathrm{tg}\,\pi x$. Используя тот же факт, получим, что наименьший положительный период как произведения, так и частного равен 1.

Существуют и другие примеры.

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные пробелы или неточности – 7-8 баллов
Приведен верный пример, но обоснования отсутствуют – 5 баллов
Приведен только ответ – 0 баллов
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№3. Параллельность. В основании пирамиды *PABCD* лежит выпуклый четырёхугольник *ABCD.* На рёбрах *AB* и *CD* отмечены точки *E* и *F* соответственно так, что равны объёмы пирамид *PABCF* и *PDCBE*. Докажите, что прямые *EF* и *AD* параллельны.

Фольклор

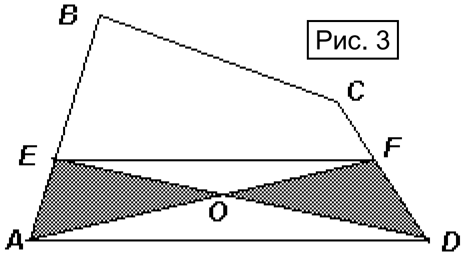


Рис. 3

Решение. Указанные в условии пирамиды имеют общую высоту, опущенную из вершины *P*, поэтому из равенства их объёмов следует равенство площадей их оснований: четырёхугольников *ABCF* и *DCBE*.

Так как четырёхугольник *ABCD* выпуклый, то выпуклым является и четырёхугольник *AEFD*, значит, его диагонали пересекаются в некоторой точке *O* (см. рис. 3). Следовательно, пятиугольник *BEOFC* является общей частью равновеликих четырёхугольников *ABCF* и *DCBE*, поэтому равны площади треугольников *AOE* и *DOF*.

Добавив к их площадям площадь треугольника *AOD*, получим равновеликость треугольников *ADE* и *ADF*. Так как у этих треугольников сторона *AD* общая, то равны высоты, проведённые из вершин *E* и *F*, откуда и следует, что *EF* || *AD*.

Критерии проверки.
Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные пробелы или неточности (например, не обосновано пересечение отрезков AF и DE) – 7-8 баллов
Задача обоснованно сведена к планиметрической, но дальнейшие продвижения отсутствуют или ошибочны – 2 балла
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

№4. Монеты. В сундуке лежат монеты пяти видов: луидоры, пиастры, дублоны, песеты и талеры. Известно, что если вынуть любые 100 монет из сундука, то среди вынутых видов обязательно найдутся два таких, что количество монет этих видов среди вынутых отличается не меньше чем на 3. Какое наибольшее количество монет может быть в сундуке?

А. Шаповалов, XXVI турнир математических боёв имени А.П. Савина

Ответ*:* 219.

Решение. Оценка. Обозначим количества монет разных видов: $A \geq B \geq C \geq D \geq E$. Если $A \geq 100$, то можно вынуть 100 монет одного вида, поэтому $A \leq 99$.

Если $B \geq 50$, то можно вынуть по 50 монет двух видов, поэтому $B \leq 49$. Следовательно, либо $B = 49$, но тогда суммарное количество монет первых двух видов меньше ста, либо $B \leq 48$ (иначе можно вынуть 51 монету первого вида и 49 второго). В любом случае, $A + B \leq 147$.

Аналогично, если $C \geq 34$, то можно вынуть 34, 33 и 33 монеты трёх видов, значит, $C \leq 33$. Следовательно, либо $C = 33$ или $C = 32$, но тогда суммарное количество монет первых трёх видов меньше ста, либо $C \leq 31$ (иначе можно взять $34 + 34 + 32$ монет первых трёх видов). В любом случае, $A + B + C \leq 178$.

Аналогично, $A + B + C + D \leq 201$ и $A + B + C + D + E \leq 219$.

Пример. В сундуке 99 луидоров, 48 пиастров, 31 дублон, 23 песеты и 18 талеров.

Критерии проверки.
Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, в котором есть незначительные пробелы или неточности – 7-8 баллов
Приведены верный ответ и верный пример, но нет оценки – 3 балла
Приведен только верный ответ – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

II. Методический блок.

В заданиях №5 – №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и поясните их суть. Отдельно укажите верен ли «ответ». Если условие «задачи» корректно, а «решение» неверно, то приведите верное решение.

№5. Пробег. «Задача». Гонец выбежал из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми 18 км. Он бежал 2 часа 40 минут, причём за каждый промежуток времени в один час он пробегал ровно 6 км. Мог ли он за это время достигнуть пункта Б?
«Ответ»: нет.
«Решение». Так как средняя скорость движения гонца равна 6 км/ч, то за указанное время он пробежал $6\cdot 2\frac{2}{3}=16$ км, то есть не добежал до пункта Б.

Предложил А. Блинков (по задаче Н. Константинова)

Комментарий. Условие «задачи» корректно, а «решение» и «ответ» неверные. В «Решении» допущена ошибка: из того, что за каждый час гонец пробегал ровно 6 км, не следует, что средняя скорость гонца такая же. Действительно, средняя скорость равна отношению длины пройденного пути к времени, затраченному на этот путь.

Приведём пример движения гонца, позволяющий ему достигнуть пункта Б. Пусть за первые 40 минут он пробежал 6 км, затем 20 минут отдыхал, за следующие 40 минут пробежал ещё 6 км, 20 минут отдыхал, а за последние 40 минут пробежал ещё 6 км. Тогда в сумме он пробежал 18 км и достиг пункта Б. При таком графике движения выполняется условие «задачи»: за каждый час гонец пробегает ровно 6 км.

Отметим, что тогда средняя скорость гонца равна $18:2\frac{2}{3}=\frac{27}{4}$ *= 6,75 км/ч.*

Критерии проверки (*баллы суммируются*).
Указано, что условие «задачи» корректно – 1 балл
Указано, что «ответ» и «решение» неверные – 1 балл
Верно объяснена ошибка в «решении» – 4 балла
Приведено верное решение – 4 балла

№6. Разбиение. «Задача». Докажите, что если треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный.
«Решение». Будем доказывать это утверждение методом математической индукции.
База индукции. Если треугольник разбит на два треугольника, то утверждение верно.
Шаг индукции. Пусть есть треугольник, как-то разбитый на *n* треугольников. Проведём еще один отрезок, который разбивает один из маленьких треугольников на два. Получим разбиение на *n* + 1 треугольник, причём хотя бы один из новых треугольников – не остроугольный.

Таким образом, утверждение верно для любого указанного разбиения.

Использован фрагмент статьи
С. Дориченко «Где ошибка?», журнал «Квант», №4/2011

Комментарий. Утверждение, сформулированное в условии «задачи», неверное. Действительно, можно привести контрпример: рассмотрим остроугольный треугольник, который средними линиями разбит на 4 треугольника. Так как треугольники разбиения подобны исходному, то они также остроугольные.

В «решении» ошибочен шаг индукции, так как он учитывает не все возможные разбиения на треугольники.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

Указано, что условие «задачи» некорректно – 1 балл
Приведён контрпример – 5 баллов
Верно объяснена ошибка в «решении» – 4 балла

№7. Уравнение. «Задача». Решите уравнение: $x^2 +\{x\}x +[x] = 0$, где $[x]$ и $\{x\}$ – целая и дробная части числа x соответственно.

«Ответ»: 0, –1.

«Решение». Так как $x = [x] + \{x\}$, то исходное уравнение можно записать следующим образом: $x^2 + (x – [x])\cdot x + [x] = 0$, откуда $2x^2 + [x] – [x]\cdot x = 0$.

Заметим, что $x^2 + [x] \geq 0$ и $x^2 – [x]\cdot x \geq 0$. Следовательно, уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда оба этих неравенства обращаются в равенства. Корнями уравнения $x^2 + [x] = 0$ являются числа 0 и –1, эти же числа являются корнями уравнения $x^2 – [x]\cdot x = 0$.

Предложил Н. Наконечный
(по задаче из математической регаты 10класса 2017/18 уч. г.)

Комментарий. Условие «задачи» корректно, а «ответ» и «решение» неверные. Найдены не все корни уравнения. Ошибка в «решении»: каждое из использованных неравенств выполняется не для всех значений x. Например, оба неравенства неверны при $x = –0,6$. Действительно, $[–0,6] = –1$, поэтому значение левой части первого неравенства равно –0,64, а значение левой части второго неравенства равно –0,24.

Приведём верное решение.

Пусть $[x]=a$, $\{x\}=d$, тогда данное уравнение примет вид: $(a+d)^2+d(a+d)+a=0$ $\Leftrightarrow$ $a^2+(3d+1)a+2d^2=0$.

Первый способ. Так как $0 \leq d < 1$, то $0 \leq 3d + 1< 4$. Следовательно, полученное равенство может выполняться только в случае, когда $a \leq 0$.

1) Если $a = 0$, то $d = 0$, то есть $x = 0$ – корень исходного уравнения.

2) Пусть $a < 0$, тогда необходимым условием для выполнения равенства является: $a^2+(3d+1)a \leq 0 \Leftrightarrow a(a+3d+1) \leq 0$. В этом случае: $a \geq -(3d+1) > –4$.

Так как a – целое число, то возможны только три значения a: –1; –2; –3.

Если $a = –1$, то $2d^2-3d = 0$, то есть $d = 0$. Тогда $x = –1$ – корень исходного уравнения.

Если $a = –2$, то $2d^2-6d+2 = 0 \Leftrightarrow d^2-3d+1 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$. Так как $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, а $0 < \frac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$, то $x = –2 + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ – корень исходного уравнения.

Если $a = –3$, то $2d^2-9d+6 = 0 \Leftrightarrow d = \frac{9\pm\sqrt{33}}{4}$. Так как $\frac{9+\sqrt{33}}{4} > 1$, а $0 < \frac{9-\sqrt{33}}{4} < 1$, то $x = –3 + \frac{9-\sqrt{33}}{4} = -\frac{3+\sqrt{33}}{4}$ – корень исходного уравнения.

Второй способ. Рассмотрим полученное уравнение как квадратное относительно d: $2d^2+3ad+(a^2+a)=0$. Его дискриминант: $D=9a^2-8(a^2+a)=a(a-8)$, значит, оно имеет корни, если $\left[\begin{array}{l} a\leq 0 \\ a\geq 8 \end{array}\right.$.

Выясним теперь, при каких значениях a хотя бы один из корней лежит в промежутке $[0;1)$. Для этого рассмотрим квадратичную функцию $f(d)=2d^2+3ad+(a^2+a)$. Её график – парабола, ветви которой направлены вверх, абсцисса вершины: $d_0=-\frac{3a}{4}$. Требуемое условие равносильно тому, что парабола пересекает ось x на указанном промежутке. Это возможно в двух случаях: 1) $\begin{cases} f(0)\cdot f(1)\le 0, \\ f(1)\ne 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 0\le d_0<1, \\ f(0)\ge 0, \\ f(1)>0. \end{cases}$

Учитывая, что $f(0)=a^2+a$, $f(1)=a^2+4a+2$, получим:

1) $\begin{cases} a(a+1)\left(a-\left(-2-\sqrt{2}\right)\right)\left(a-\left(-2+\sqrt{2}\right)\right)\le 0, \\ a\ne -2\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2-\sqrt{2}<a\le -1 \\ -2+\sqrt{2}<a\le 0 \end{array}\right.$. Так как a – целое число, то оно может принимать одно из четырех значений: 0; –1; –2; –3.

2) $\begin{cases} 0\le -\dfrac{3a}{4}<1, \\ a(a+1)\ge 0 \end{cases}$. Тогда a = 0 или a = –1.

Подставив в квадратное уравнение найденные значения a, получим значения d, указанные выше, и придем к такому же ответу в исходном уравнении.

Ответ: 0, –1; $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$; $-\dfrac{3+\sqrt{33}}{4}$.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

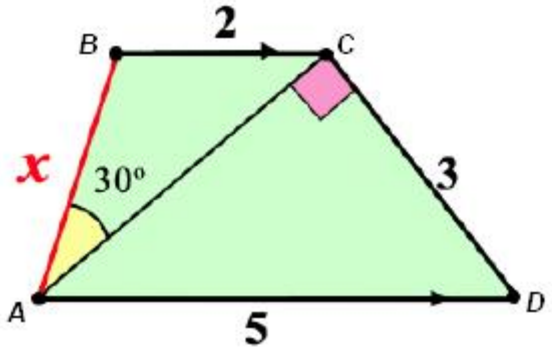
Указано, что условие «задачи» корректно – 1 балл

Указано, что «ответ» и «решение» неверные – 1 балл

Верно объяснена ошибка в «решении» – 3 балла

Приведено верное решение – 5 баллов

№8. Трапеция. *На уроке геометрии в 9 классе была предложена «задача»*: $ABCD$ – трапеция. Найдите длину стороны AB по данным на чертеже.



«Решение Максима». $\sin\angle CAD=\dfrac{CD}{AD}=0{,}6$. Так как $\angle BCA=\angle CAD$, то из треугольника ABC по теореме синусов: $\dfrac{x}{0{,}6}=\dfrac{2}{0{,}5}$, откуда x = 2,4.

«Решение Димы». $AC=\sqrt{AD^2-CD^2}$ = 4. В треугольнике ABC с углом 30° сторона BC, лежащая напротив этого угла, в два раза меньше стороны AC. Значит, угол ABC прямой. По теореме Пифагора $x=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

Прокомментируйте условие «задачи» и оба «решения».

Предложил А. Сгибнев

Комментарий. Каждое из «решений» само по себе ошибок не содержит. Почему получились разные ответы? Потому, что некорректно условие «задачи»: указанные на чертеже данные противоречивы.

В «решении Димы» верно найдено, что AC = 4, откуда действительно следует, что угол ABC прямой. Тогда угол BCA должен быть равен 60°, а sin60° = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Но в «решении Максима» верно найдено, что $\sin\angle BCA=\sin\angle CAD$ = 0,6. При этом, $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\ne$ 0,6.

Критерии проверки (*баллы суммируются*).

Указано, что оба «решения» ошибок не содержат – 2 балла

Указано, что условие «задачи» некорректно – 1 балл

Верно и полностью объяснено, почему данные «задачи» противоречивы – 7 баллов