Всероссийская ассоциация учителей математики
Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета
Московский центр непрерывного математического образования
Центр педагогического мастерства города Москвы
Республиканская естественно-математическая школа

IV конкурс учителей математики Юга России
Майкоп, Республика Адыгея, 23 октября 2021 года

Уважаемые коллеги!

1. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно четко указать номер задания (переписывать условия не надо).
2. Первая половина тетради является чистовиком, вторая половина тетради является черновиком.
3. Вам предлагаются два блока заданий:
№1 – №4. «Математический» (задачи для решения).
№5 – №8. «Методический» (задания, моделирующие повседневную работу учителя).
4. Продолжительность конкурса – 4 часа.

Желаем успеха!

I. Решите задачи.

№1. Производительность. Фирма, состоящая из нескольких рабочих и бригадира, производит сувениры. В течение дня каждый рабочий делал по одинаковому целому количеству сувениров, а бригадир – также целое количество, которое на 13 больше, чем средняя дневная производительность фирмы. Сколько рабочих в фирме?

№2. Функции. Существуют ли две функции с наименьшим положительным периодом 2 такие, что их произведение и частное имеют наименьший положительный период 1?

№3. Параллельность. В основании пирамиды *PABCD* лежит выпуклый четырёхугольник *ABCD.* На рёбрах *AB* и *CD* отмечены точки *E* и *F* соответственно так, что равны объёмы пирамид *PABCF* и *PDCBE*. Докажите, что прямые *EF* и *AD* параллельны.

№4. Монеты. В сундуке лежат монеты пяти видов: луидоры, пиастры, дублоны, песеты и талеры. Известно, что если вынуть любые 100 монет из сундука, то среди вынутых видов обязательно найдутся два таких, что количество монет этих видов среди вынутых отличается не меньше чем на 3. Какое наибольшее количество монет может быть в сундуке?

II. Методический блок.

В заданиях №5 – №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Укажите, корректно ли условие «задачи». Если оно некорректно, то объясните, почему это так. Если неверно «решение», то укажите все ошибки и поясните их суть. Отдельно укажите верен ли «ответ». Если условие «задачи» корректно, а «решение» неверно, то приведите верное решение.

№5. Пробег. «Задача». Гонец выбежал из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми 18 км. Он бежал 2 часа 40 минут, причём за каждый промежуток времени в один час он пробегал ровно 6 км. Мог ли он за это время достигнуть пункта Б?

«Ответ»: нет.

«Решение». Так как средняя скорость движения гонца равна 6 км/ч, то за указанное время он пробежал $6\cdot 2\frac{2}{3}=16$ км, то есть не добежал до пункта Б.

№6. Разбиение. «Задача». Докажите, что если треугольник разбит отрезками на треугольники, то хотя бы один из треугольников разбиения не остроугольный.

«Решение». Будем доказывать это утверждение методом математической индукции.

<u>База индукции</u>. Если треугольник разбит на два треугольника, то утверждение верно.

<u>Шаг индукции</u>. Пусть есть треугольник, как-то разбитый на n треугольников. Проведём еще один отрезок, который разбивает один из маленьких треугольников на два. Получим разбиение на n + 1 треугольник, причём хотя бы один из новых треугольников – не остроугольный.

Таким образом, утверждение верно для любого указанного разбиения.

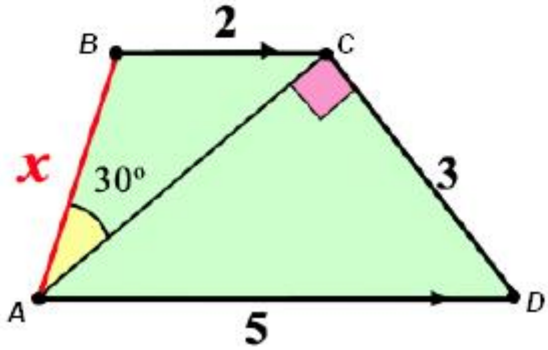
№7. Уравнение. «Задача». Решите уравнение: $x^2 + \{x\}x + [x] = 0$, где $[x]$ и $\{x\}$ – целая и дробная части числа x соответственно.

«Ответ»: 0, –1.

«Решение». Так как $x = [x] + \{x\}$, то исходное уравнение можно записать следующим образом: $x^2 + (x - [x])\cdot x + [x] = 0$, откуда $2x^2 + [x] - [x]\cdot x = 0$.

Заметим, что $x^2 + [x] \geq 0$ и $x^2 - [x]\cdot x \geq 0$. Следовательно, уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда оба этих неравенства обращаются в равенства. Корнями уравнения $x^2 + [x] = 0$ являются числа 0 и –1, эти же числа являются корнями уравнения $x^2 - [x]\cdot x = 0$.

№8. Трапеция. *На уроке геометрии в 9 классе была предложена «задача»*: $ABCD$ – трапеция. Найдите длину стороны AB по данным на чертеже.



«Решение Максима». $\sin\angle CAD = \frac{CD}{AD} = 0{,}6$. Так как $\angle BCA = \angle CAD$, то из треугольника ABC по теореме синусов: $\frac{x}{0{,}6} = \frac{2}{0{,}5}$, откуда $x = 2{,}4$.

«Решение Димы». $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = 4$. В треугольнике ABC с углом 30° сторона BC, лежащая напротив этого угла, в два раза меньше стороны AC. Значит, угол ABC прямой. По теореме Пифагора $x = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$.

Прокомментируйте условие «задачи» и оба «решения».