Ответы, решения, комментарии, критерии проверки
II конкурс учителей математики Юга России
Каждое задание оценивается, исходя из 10 баллов

I. Решите задачи.

1. Одинаковые значения. В записи –2 –3 –4 –4 расставьте между соседними числами знаки сложения, умножения и скобки двумя способами так, чтобы значения полученных выражений были одинаковыми. (*Ставятся только те скобки, которые меняют значение выражения*.)

Ответ: $(-2)\cdot(-3) + (-4)(-4) = -2\cdot((-3) + (-4) + (-4)).= -2 + (-3)\cdot(-4 + (-4))$ (*то есть можно выбрать любые два способа из трёх*).

А. Сгибнев, Д. Шноль, XXV турнир математических боёв имени А.П. Савина

Критерии проверки.
Приведён верный ответ – 10 баллов
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

2. Таблица. Можно ли таблицу размером $n\times n$ заполнить числами –1, 0, 1 так, чтобы суммы во всех строках, во всех столбцах и на главных диагоналях были различными?

Ответ: нельзя.

Решение. Всего рассматриваются $2n + 2$ суммы. Заметим, что каждая из этих сумм – целое число, наибольшая возможная сумма равна n, а наименьшая сумма равна $-n$. На отрезке $[-n; n]$ расположено ровно $2n + 1$ целых чисел. Тогда, по принципу Дирихле, хотя бы две суммы будут равны.

Фольклор

Критерии проверки.
Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов
Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов
Приведен только ответ – 0 баллов
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

3. Уравнение. Решите уравнение: $\sin x = 2\sin20°\sin(170° - x)$.

Ответ: $20° + 180°n,\ n\in Z$.

Решение. Так как $\sin(170° - x) = \sin(x + 10°) = \sin x\cos10° + \cos x\sin10°$, то уравнение примет вид: $\sin x = 2\sin x\sin20°\cos10° + 2\cos x\sin20°\sin10° \Leftrightarrow \sin x(1 - 2\sin20°\cos10°) = 2\cos x\sin20°\sin10°$.

Учитывая, что $1 - 2\sin20°\cos10° = 1 - (\sin30° + \sin10°) = (1 - \sin30°) - \sin10° = \sin30° - \sin10° = 2\sin10°\cos20°$, получим: $2\sin x\sin10°\cos20° = 2\cos x\sin20°\sin10° \Leftrightarrow \sin x\cos20° - \cos x\sin20° = 0 \Leftrightarrow \sin(x - 20°) = 0 \Leftrightarrow x = 20° + 180°n,\ n\in Z$.

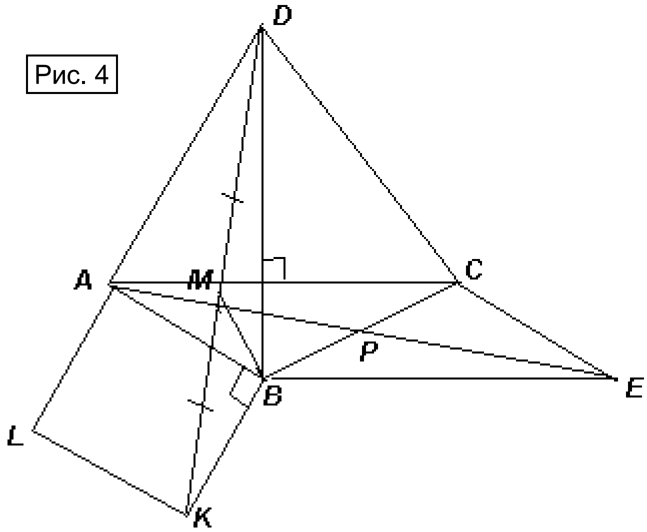
Олимпиада САММАТ_2017

Критерии проверки.
Приведено полное решение и получен верный ответ– 10 баллов
Присутствуют верные идеи преобразования выражений, но решение не доведено до конца – 3 балла
Приведен только верный ответ – 1 балл
Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

4. Четырёхугольник. В четырёхугольнике *ABCD* диагонали равны и перпендикулярны. На стороне *AB* во внешнюю сторону построен квадрат *ABKL*. Точка *M* – середина отрезка *KD*. Докажите, что $\angle CBM = 90°$.

Решение. Рассмотрим поворот с центром *B* на 90°.по часовой стрелке (см. рис. 4). Образом точки *K* будет точка *A*, а образом точки *D* – такая точка *E*, что $\angle DBE = 90°$ и *BE* = *BD*. Значит, образом точки *M* при таком повороте будет середина *P* отрезка *AE*.

Рис. 4



Так как $BD \perp AC$ и *BD* = *AC*, то *BE* || *AC* и *BE* = *AC*, то есть *ABEC* – параллелограмм. Следовательно, середина *P* его диагонали *AE* является и серединой диагонали *BC*. Значит, $\angle CBM = \angle PBM = 90°$.

Можно также провести рассуждение, которое не использует поворот в явном виде. Для этого надо построить параллелограмм ABEC и доказать равенство треугольников ABE и KBD.

М. Волчкевич

Критерии проверки.

Приведено полное обоснованное решение – 10 баллов

Приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности – 8 баллов

Присутствует верные идеи, но решение не доведено до конца – 3 балла

Задача не решена или решена неверно – 0 баллов

II. Методический блок.

В заданиях №5 – №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и поясните их суть, а затем приведите верное решение. Отдельно укажите, верен ли «ответ».

5. Последовательность. «Задача». Сумма первых *n* членов последовательности $\{a_n\}$ находится по формуле: $S_n = 3^{n+1} + 2\cdot 3^n$. Является ли $\{a_n\}$ геометрической прогрессией?

«Ответ»: является.

«Решение». Из условия следует, что $S_n = 3^{n+1} + 2\cdot 3^n = 5\cdot 3^n$. Найдем формулу *n*-го члена данной последовательности: $a_n = S_n - S_{n-1} = 5\cdot 3^n - 5\cdot 3^{n-1} = 10\cdot 3^{n-1}$. Таким образом, последовательность является геометрической прогрессией с первым членом 10 и знаменателем 3.

Комментарий. И «ответ», и «решение» верными не являются. Ошибка «решения»: при *n* = 1 выражение S_{n-1} не определено и для него нельзя использовать формулу S_n, заданную в условии.

На самом деле, из условия задачи следует, что $a_1 = S_1 = 5\cdot 3^1 = 15$. Так как $S_2 = 5\cdot 3^2 = 45$, $S_3 = 5\cdot 3^3 = 135$, то $a_2 = S_2 - S_1 = 30$, $a_3 = S_3 - S_2 = 90$. Числа 15, 30 и 90 не являются последовательными членами геометрической прогрессии, так как $90 : 30 \neq 30 : 15$. Следовательно, $\{a_n\}$ не является геометрической прогрессией.

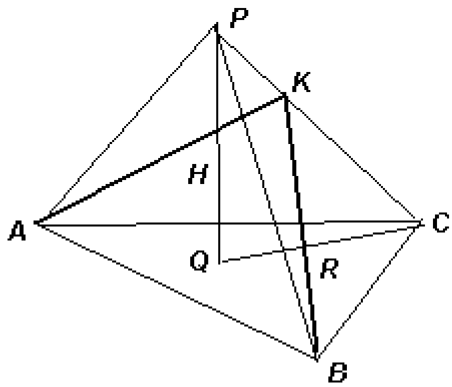
Можно доказать, что члены данной последовательности, начиная со второго, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем 3.

Предложил Д. Шноль

Критерии проверки (*баллы за 1) и 2) суммируются*)..

1) Указано, что «ответ» неверный, указана и объяснена ошибка в «решении» – 5 баллов
Указано, что «ответ» неверный и указана ошибка в «решении», но пояснений нет – 2 балла
Указано только, что «ответ» неверный – 1 балл
2) Доказано, что $\{a_n\}$ не является геометрической прогрессией – 5 баллов

6. Сечение. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3, а ее высота равна 1. Через ребро основания проведено сечение, перпендикулярное противолежащему боковому ребру. Найдите его площадь.

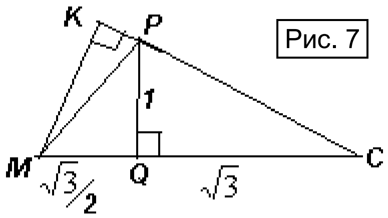


«Ответ»: $\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

«Решение». Пусть треугольник *ABK* – данное перпендикулярное сечение пирамиды *PABC*, Q – основание её высоты (см. рисунок). Запишем объем пирамиды двумя способами: 1) *V* = $\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot H$ = $\frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot 1$ = $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; 2) *V* = $\frac{1}{3}S_{ABK}\cdot PC$.

Вычислим длину бокового ребра *PC*, предварительно найдя радиус *R* окружности, описанной около *ABC*: *R* = *CQ* = $\frac{3\sqrt{3}}{3}$ = $\sqrt{3}$, тогда *PC* = $\sqrt{H^2+R^2}$ = $\sqrt{1+3}$ = 2. Следовательно, $S_{ABK}=\frac{3V}{PC}$ = $\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

.**Комментарий**. Условие «задачи» некорректно, так как плоскость, содержащая ребро основания и перпендикулярная противолежащему боковому ребру, пересекает это ребро в точке, лежащей вне пирамиды. Докажем это.



Пусть *M* – середина *AB*, тогда отрезок *CM* содержит точку *Q* (см. рис. 7). По признаку перпендикулярности прямой и плоскости (*AB*)⊥(*CMP*) (см. рисунок в условии). В прямоугольном треугольнике *PQC*: *PQ* = 0,5*PC*, значит, ∠*PCQ* = 30°, ∠*CPQ* = 60°. Из прямоугольного треугольника *PQM*: tg∠*MPQ* = $\frac{MQ}{PQ}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ > $\frac{\sqrt{3}}{3}$ = tg30°, значит, ∠*MPQ* > 30°, тогда ∠*CPM* > 90°. Прямая *MK* является пересечением плоскостей *CPM* и указанного сечения, поэтому отрезок *MK* – высота треугольника *CPM*. Так как угол *CPM* – тупой, то эта высота лежит вне треугольника.

Таким образом, заданное сечение состоит только из ребра *AB* и искать его площадь не имеет смысла.

По результатам анализа ошибки, допущенной в «решении», возможна и другой комментарий: можно считать условие «задачи» корректным, тогда неверны «решение» и «ответ». Верным решением будет являться доказательство того, что искомым сечением является только ребро основания, а верный ответ: 0.

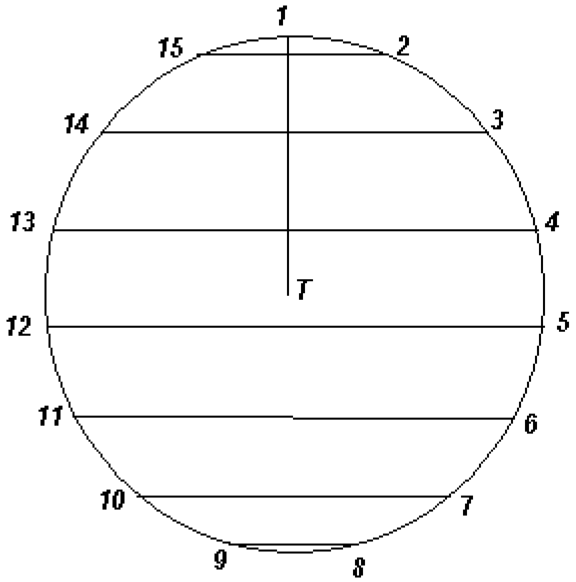
В.И. Рыжик. 30 000 уроков математики. – М.: «Просвещение», 2003

<u>Критерии проверки</u> (*баллы суммируются*)..
Указано, что условие «задачи» некорректно (либо корректно, но «ответ» неверный) – 1 балл
Указано, что искомое сечение проведено неверно, но это не обосновано – 2 балла
Доказано, что плоскость искомого сечения пересекает продолжение бокового ребра – 7 баллов

7. Турнир. «Задача». В круговом турнире участвуют 16 команд, среди которых 6 «топовых». Организаторы хотят составить расписание так, чтобы в каждом туре было не более одного матча между «топовыми» командами. Возможно ли это?

«Ответ»: возможно.

«Решение». Заметим, что «топовые» команды должны сыграть между собой $\frac{6 \cdot 5}{2}$ = 15 матчей, а в турнире из шестнадцати команд как раз 15 туров. Покажем, каким образом можно составить расписание турнира.



Поставим одну «топовую» команду ***T*** в центр круга, а остальные 15 команд равномерно расставим по окружности. Пронумеруем их по часовой стрелке числами от 1 до 15, и пусть остальными «топовыми» будут команды с номерами ***1***, ***2***, ***5***, ***9*** и ***11*** (см. рисунок). Несложно проверить, что среди хорд, соединяющих «топовые» команды попарно, нет двух параллельных. Пусть в I туре команда ***T*** играет с командой *1*, проведем соответствующий радиус. Остальные команды разобьем на пары так, чтобы хорды, соединяющие команды в парах, были перпендикулярны этому радиусу (см. рисунок). Во II туре команда ***T*** играет с командой ***2***, а остальные пары соответствуют хордам, перпендикулярным радиусу, соединяющему ***T*** и ***2***. Аналогично составляем расписание остальных туров, постепенно двигаясь по часовой стрелке. Ввиду вышесказанного никакие две «топовые» команды играть в одном туре не будут.

Комментарий. Приведён верный ответ, но «решение» неверное. Покажем это. Рассмотрим, например, V тур. Согласно указанному алгоритму, в нём встретятся «топовые» команды ***T*** и ***5***, но в этом же туре встретятся «топовые» команды ***1*** и ***9***, так как соединяющая их хорда перпендикулярна радиусу, соединяющему ***T*** и ***5***.

Опровергнуть алгоритм составления расписания, приведённый в «решении», можно и по-другому. Как показано выше, в каждом туре должна быть ровно одна встреча между «топовыми» командами, то есть туров, в которых нет таких матчей, быть не должно. Рассмотрим, например, IV тур. Согласно алгоритму в «решении», в нём встретятся такие команды: ***T*** –.4, 3 – ***5***, ***2*** – 6, ***1*** – 7, 15 – 8, 14 – ***9***, 13 – 10, 12 – ***11*** (жирным курсивом выделены «топовые» команды). Таким образом, в этом туре нет матча между «топовыми» командами. Противоречие.

Но такое рассуждение только показывает, что предъявленный алгоритм неверен, но не объясняет, где именно допущена ошибка.

	E	F	G	H
A	**1**	4	3	2
B	**2**	1	4	3
C	**3**	2	1	4
D	4	3	2	1

Приведём верное решение, то есть покажем, каким образом можно составить требуемое расписание. Вначале заметим, что круговой турнир для четырёх команд, среди которых три «топовых» можно провести в три тура, не нарушая условие задачи. Далее, если у нас еще одна четверка команд, среди которых одна «топовая», то матчи команд из разных четвёрок можно провести по «шевенингенской» системе и для выполнения условия задачи достаточно трёх туров. Например, это можно сделать так, как показано в таблице (*буквами обозначены команды, цифрами – номера туров, жирным выделены «топовые» команды и номера туров, в которых они встретятся между собой*).

Используя эти факты, можно составить расписание для турнира, в котором 16 команд. Разобьем команды на четыре четвёрки, в первой – три «топовые» команды, а в остальных – по одной. Пусть в первых трёх турах проходят игры внутри четверок, а в турах с номерами 4 – 7 команды четвёрки №1 играют с командами четвёрки №2, а команды четвёрки №3 играют с командами четвёрки №4. При этом в трёх турах встречаются «топовые» команды первых двух четвёрок (см. таблицу), а в оставшемся туре – «топовые» команды третьей и четвертой. Аналогично строится расписание для туров с номерами 8 – 11, когда между собой встречаются команды четвёрок №1 и №3, №2 и №4, и туров 12 – 15, когда встречаются между собой команды четвёрок №1 и №4, №2 и №3.

Предложил А. Грибалко (использована задача А. Блинкова, XXV турнир математических боёв имени А.П. Савина)

Критерии проверки (*баллы за 1) – 3) суммируются*).

1) Указано, что «ответ» верный – 1 балл

2) Верно объяснена ошибка в «решении» – 4 балла

Показано, что алгоритм в «решении» неверен, но ошибка не объяснена – 3 балла

3) Приведено верное решение – 5 баллов

8. Учитель дал задание классу: выбрать три подряд идущих трёхзначных числа и вычислить сумму их квадратов У одного из учеников получилось 1106173, у другого – 1127309, у третьего – 1211186. Не зная выбранных чисел, учитель сразу определил, кто из них получил неверный ответ Определите и Вы, чьи результаты заведомо неверны, и объясните, почему это так.

Комментарий. Ответы первого и третьего ученика не могут быть верными. Действительно, сумма квадратов любых трёх подряд идущих натуральных чисел имеет вид: $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2$.

Из ответа первого ученика следует, что $3n^2 = 1106171$. Таких натуральных n не существует, так как число в правой части этого равенства не делится на 3 (сумма его цифр равна 17).

Из ответа третьего ученика следует, что $3n^2 = 1211184$, тогда $n^2 = 403728$. Но квадрат натурального числа не может оканчиваться цифрой 8.

Отметим, что второй ученик получил верный ответ: равенство $3n^2 + 2 = 1127309$ выполняется при $n = 613$, то есть он верно нашёл сумму $612^2 + 613^2 + 614^2$. Объяснять это от участников конкурса не требовалось.

Предложил А. Блинков

Критерии проверки.

Верно указаны оба ученика, допустивших ошибки, и верно объяснено, как это определить – 10 баллов

Верно указаны оба ученика, допустивших ошибки, но верно обосновано только для одного из них – 6 баллов

Верно указан только один ученик, допустивший ошибку, и верно объяснено, как это определить – 5 баллов

Верно указаны оба ученика, допустивших ошибки, но обоснования отсутствуют – 2 балла

Верно указан только один ученик, допустивший ошибку, но обоснования отсутствуют – 1 балл

Приведен ответ и неверные обоснования – 0 баллов