Всероссийская ассоциация учителей математики
Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета
Московский центр непрерывного математического образования
Центр педагогического мастерства города Москвы
Республиканская естественно-математическая школа

II конкурс учителей математики Юга России

Майкоп, Республика Адыгея, 5 октября 2019 года

Уважаемые коллеги!

1. Задания можно выполнять и записывать в любом порядке. Решение КАЖДОГО задания надо начинать с новой страницы. Достаточно четко указать номер задания (переписывать условия не надо).
2. Первая половина тетради является чистовиком, вторая половина тетради является черновиком.
3. Вам предлагаются два блока заданий:
№1 – №4. «Математический» (задачи для решения).
№5 – №8. «Методический» (задания, моделирующие повседневную работу учителя).
4. Продолжительность конкурса – 4 часа.

Желаем успеха!

I. Решите задачи.

1. Одинаковые значения. В записи –2 –3 –4 –4 расставьте между соседними числами знаки сложения, умножения и скобки двумя способами так, чтобы значения полученных выражений были одинаковыми. (С*тавятся только те скобки, которые меняют значение выражения*.)

2. Таблица. Можно ли таблицу размером $n\times n$ заполнить числами –1, 0, 1 так, чтобы суммы во всех строках, во всех столбцах и на главных диагоналях были различными?

3. Уравнение. Решите уравнение: $\sin x = 2\sin 20°\sin(170° - x)$.

4. Четырёхугольник. В четырёхугольнике $ABCD$ диагонали равны и перпендикулярны. На стороне AB во внешнюю сторону построен квадрат $ABKL$. Точка M – середина отрезка KD. Докажите, что $\angle CBM = 90°$.

II. Методический блок.

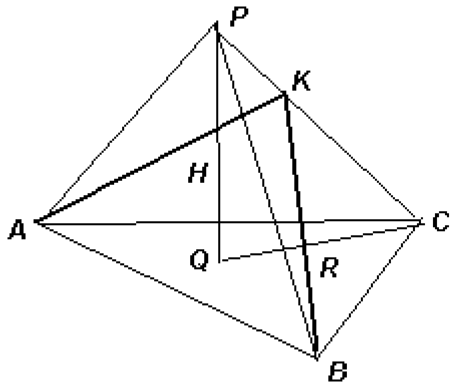
В заданиях №5 – №7 могут содержаться математические ошибки (как в условиях «задач», так и в «ответах» и «решениях»). Если некорректно условие «задачи», то объясните, почему это так. Если неверно только «решение», то укажите все ошибки и поясните их суть, а затем приведите верное решение. Отдельно укажите, верен ли «ответ».

5. Последовательность. «Задача». Сумма первых n членов последовательности $\{a_n\}$ находится по формуле: $S_n = 3^{n+1} + 2\cdot 3^n$. Является ли $\{a_n\}$ геометрической прогрессией?

«Ответ»: является.

«Решение». Из условия следует, что $S_n = 3^{n+1} + 2\cdot 3^n = 5\cdot 3^n$. Найдем формулу n-го члена данной последовательности: $a_n = S_n - S_{n-1} = 5\cdot 3^n - 5\cdot 3^{n-1} = 10\cdot 3^{n-1}$. Таким образом, последовательность является геометрической прогрессией с первым членом 10 и знаменателем 3.

6. Сечение. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 3, а ее высота равна 1. Через ребро основания проведено сечение, перпендикулярное противолежащему боковому ребру. Найдите его площадь.



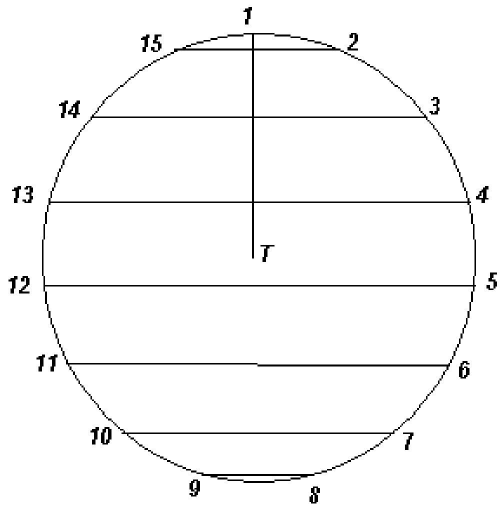
«Ответ»: $\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

«Решение». Пусть треугольник *ABK* – данное перпендикулярное сечение пирамиды *PABC*, Q – основание её высоты (см. рисунок). Запишем объем пирамиды двумя способами: 1) *V* = $\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot H$ = $\frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot 1$ = $\frac{3\sqrt{3}}{4}$; 2) *V* = $\frac{1}{3}S_{ABK}\cdot PC$.

Вычислим длину бокового ребра *PC*, предварительно найдя радиус *R* окружности, описанной около *ABC*: *R* = *CQ* = $\frac{3\sqrt{3}}{3}$ = $\sqrt{3}$, тогда *PC* = $\sqrt{H^2+R^2}$ = $\sqrt{1+3}$ = 2. Следовательно, $S_{ABK}=\frac{3V}{PC}$ = $\frac{9\sqrt{3}}{8}$.

7. Турнир. «Задача». В круговом турнире участвуют 16 команд, среди которых 6 «топовых». Организаторы хотят составить расписание так, чтобы в каждом туре было не более одного матча между «топовыми» командами. Возможно ли это?

«Ответ»: возможно.



«Решение». Заметим, что «топовые» команды должны сыграть между собой $\frac{6\cdot 5}{2}$ = 15 матчей, а в турнире из шестнадцати команд как раз 15 туров. Покажем, каким образом можно составить расписание турнира.

Поставим одну «топовую» команду ***T*** в центр круга, а остальные 15 команд равномерно расставим по окружности. Пронумеруем их по часовой стрелке числами от 1 до 15, и пусть остальными «топовыми» будут команды с номерами ***1***, ***2***, ***5***, ***9*** и ***11*** (см. рисунок). Несложно проверить, что среди хорд, соединяющих «топовые» команды попарно, нет двух параллельных. Пусть в I туре команда ***T*** играет с командой *1*, проведем соответствующий радиус. Остальные команды разобьем на пары так, чтобы хорды, соединяющие команды в парах, были перпендикулярны этому радиусу (см. рисунок). Во II туре команда ***T*** играет с командой ***2***, а остальные пары соответствуют хордам, перпендикулярным радиусу, соединяющему ***T*** и ***2***. Аналогично составляем расписание остальных туров, постепенно двигаясь по часовой стрелке. Ввиду вышесказанного никакие две «топовые» команды играть в одном туре не будут.

8. Учитель дал задание классу: выбрать три подряд идущих трёхзначных числа и вычислить сумму их квадратов У одного из учеников получилось 1106173, у другого – 1127309, у третьего – 1211186. Не зная выбранных чисел, учитель сразу определил, кто из них получил неверный ответ Определите и Вы, чьи результаты заведомо неверны, и объясните, почему это так.