1. Программа мини-факультатива для 8-9-го класса

Тема: *разрезание плоскости прямыми общего положения и пространства плоскостями общего положения.*

Цели: научить школьников обобщению, аналогии, выдвижению и корректировке гипотез на основе исследования частных случаев, познакомить с рекуррентным способом задания функций.

Программа рассчитана на 2-4 урока (в зависимости от активности учащихся и педагога в помощи им).

Вводная задача

Вася разрезал круглый торт четырьмя прямолинейными (несовпадающими) разрезами от края до края. Петя взял такой же торт и тоже сделал четыре прямолинейных разреза от края до края. Могло ли число кусков, образовавшихся в результате разрезания второго торта, превысить число кусков, на которые был разрезан первый, ровно в *два* раза?

Развитие темы

В результате решения школьники выясняют, что круг (торт) может быть разрезан 4-я хордами на любое количество частей от 5 до 11. Замечаем, что задача разрезания круга на максимально возможное число частей эквивалентна задаче разрезания плоскости прямыми общего положения. В то же время, в отличие от разрезания круга, 6 и 7 частей при разрезании плоскости невозможны.

Задача 2

На сколько частей разбивают плоскость *n* прямых общего положения?

Таблица значений для малых n:

Таблица 1	
n	*F(n)*
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16

Школьники сразу заметят зависимость, но при попытке корректно описать ее математически у них, скорее всего, возникнут затруднения. Важно подвести их рекуррентному описанию зависимости между числом прямых и количеством частей:

$$F(0) = 1, F(n) = F(n-1) + n \quad (1)$$

Необходимо обратить внимание, что данная формула получена на основе обобщения частных случаев и пока не доказана. Можно привести примеры, когда «закономерность» поначалу наблюдается, а затем нарушается («Число 60 делится на все натуральные числа»).

Доказательство (1) можно провести по индукции. При этом не обязательно применять метод математической индукции формально. Достаточно заметить, что при добавлении n-й прямой на ней возникает $n-1$ точка пересечения с предыдущими прямыми. Поэтому наша прямая разобьется на n частей: $n-2$ отрезка и 2 луча. При этом каждый отрезок или луч разрежет одну часть плоскости на две. Тем самым, добавится n частей.

Если на вопрос удобна ли выведенная формула школьники ответят утвердительно, можно попросить их найти, например, $F(100)$.

Для нахождения явной формулы распишем

$$F(n) = F(n-1) + n = F(n-2) + (n-1) + n = \cdots = 1 + 1 + 2 + \cdots + n$$

и применим (если надо выведем) формулу суммы арифметической прогрессии. Получим:

$$F(n) = 1 + \frac{n(n+1}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$$

А что будет, если среди прямых встречаются параллельные или в некоторых точках пересекаются более двух прямых?

По индукции докажем, что наличие k параллельных между собой прямых уменьшает количество частей на $k(k-1)/2$.

Аналогично, k прямых, пересекающихся в одной точке, уменьшает число частей на $(k-1)(k-2)/2$.

Заметим, что описание всех возможных сочетаний групп параллельных прямых и кратных пересечений для произвольного числа прямых – весьма трудная задача.

Следующую задачу (призванную научить выходить за границы стереотипа) полезно задать на дом:

Задача 3

Вася разрезал круглый торт четырьмя прямолинейными (несовпадающими) разрезами от края до края. Петя взял такой же торт и тоже сделал четыре прямолинейных разреза от края до края. Могло ли число кусков, образовавшихся в результате разреза второго торта, превысить число кусков, на которые был разрезан первый, ровно в *три* раза?

Ясно, что для плоского торта (блина) такая ситуация невозможна. Но цилиндрический торт можно разделить 4-я разрезами на 15 кусков.

Для того, чтобы школьники лучше представили себе такой способ разрезания не обязательно изготавливать модели или делать сложные чертежи. Достаточно объяснить, что 4 плоскости могут высекать из пространства тетраэдр. Если такой тетраэдр образуется внутри нашего торта, то мы получим требуемые 15 кусков: сам тетраэдр; 4 куска, примыкающих к граням; 4 куска, примыкающих к вершинам; 6 кусков, примыкающих к ребрам.

Естественным путем переходим к З**адаче 4:**

На сколько частей разбивают пространство *n* плоскостей общего положения (каждые 3 плоскости имеют общую точки, а никакие 4 – не имеют)?

По аналогии с плоским случаем замечаем, что на n-й плоскости образуются $n-1$ прямых, разбивающих эту плоскость на $F(n-1)$ частей. Каждая такая часть плоскости разбивает одну часть пространства на две. Таким образом к имеющимся добавляется $F(n-1)$ новых частей.

Переобозначим $F(n)$ через $F_2(n)$ с учетом размерности. Через $F_1(n)$ обозначим количество частей, на которые разбивают прямую *n* точек. Очевидно, $F_1(n) = n + 1$. Искомую функцию обозначим через $F_3(n)$.

В новых обозначениях имеем:

$$F_1(0) = F_2(0) = F_3(0) = 1,$$

$$F_2(n) = F_2(n-1) + F_1(n-1), F_3(n) = F_3(n-1) + F_2(n-1)\,.$$

Для небольших *n* занесем значения в общую таблицу

Таблица 2			
n	$F_1(n)$	$F_2(n)$	$F_3(n)$
0	1	1	1
1	2	2	2
2	3	4	4
3	4	7	8
4	5	11	15
5	6	16	26
6	7	22	42
7	8	29	64

Для вывода явной формулы для $F_3(n)$, заметим что явная формула для $F_1(n)$ линейна, а для $F_2(n)$ – квадратична. Предположив, что $F_3(n)$ является многочленом 3-й степени $an^3 + bn^2 + cn + d$.

Подставляя $n = 0$ сразу получим $d = 1$.

Придавая *n* значения 1, 2, 3 получим:

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 8a + 4b + 2c = 3 \\ 27a + 9b + 3c = 7 \end{cases}$$

Решив систему, получим $a = \frac{1}{6}, b = 0, c = \frac{5}{6}$.

Теперь утверждение $F_3(n) = \frac{n^3+5n+6}{6}$ легко доказывается по индукции.

Теперь зададимся вопросом: на сколько частей разбивают *k*-мерное пространство *n* плоскостей размерности $k-1$?

Хотя школьники не представляют, как устроены пространства размерности больше 3, они без труда выдвинут гипотезу:

$$F_k(0) = 1, F_k(n) = F_k(n-1) + F_{k-1}(n-1)$$

Заполним на ее основании Таблицу 3

Таблица 3						
n	$F_1(n)$	$F_2(n)$	$F_3(n)$	$F_4(n)$	$F_5(n)$	$F_6(n)$
0	1	1	1	1	1	1
1	2	2	2	2	2	2
2	3	4	4	4	4	4
3	4	7	8	8	8	8
4	5	11	15	16	16	16
5	6	16	26	31	32	32
6	7	22	42	57	63	64
7	8	29	64	99	120	127
8	9	37	93	163	219	247
9	10	46	130	256	382	466

В таблице 3 много закономерностей. Самые заметные: $F_k(n) = 2^k$ при $n \leq k$; $F_k(k+1) = 2^{k+1} - 1$; $F_k(2k+1) = 2^{2k}$.

Далее можно рассмотреть некоторые вопросы, связанные с характеристиками простейших n-мерных объектов: количество вершин, ребер граней и т.д. n-куба, длину диагонали и т.п. Можно построить изображение 4-мерного куба в параллельной, полученного параллельным переносом обычного куба на ребро в направлении перпендикулярном направлениям всех ребер трехмерного куба. Можно показать, что таким же способом можно получить 1-мерный куб (отрезок) из 0-мерного (точки), двумерный (квадрат) - из одномерного и трехмерный – из двумерного. Такие параллели существенно упрощают восприятие. На возражение школьников, что направление перпендикулярное трем смежным ребрам куба выбрать нельзя, согласиться, что это действительно невозможно в пространстве меньшей размерности. Их ведь не смущает, что при изображении обычного куба на плоскости, отрезки изображающие попарно перпендикулярные ребра не являются попарно перпендикулярными.

Возможно также построить изображение 4-мерного куба в центральной проекции (при таком изображении будет меньше лишних пересечений).