

ОКРЕСТНОСТИ ЗАДАЧ

1.1. Найдите сумму корней уравнения: $x + \frac{1}{x} = 2007$.

1.2. Докажите, что уравнения $(x+a+b) \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1$ и $(x^7 + a^7 + b^7) \cdot \left(\frac{1}{x^7} + \frac{1}{a^7} + \frac{1}{b^7}\right) = 1$ равносильны.

1.3. Найдите все положительные рациональные числа x, y такие, что числа $x + \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x}$ - целые.

(2.1.-2.6) Решите систему уравнений:

2.1. $y + x = 10, y + z = 14, x + z = 36$ **2.2.** $yx = 10, yz = 14, xz = 35$

2.3. $yx + xz = 27, yz + xy = 32, xz + yz = 35$ **2.4.** $x^2 + xy + xz = 9, y^2 + xy + yz = 27, z^2 + xz + yz = 45$

2.5. $x + xy + y = 5, y + yz + z = 11, z + zx + x = 7$

2.6. $(x+y)(x+y+z) = 72, (y+z)(x+y+z) = 120, (z+x)(x+y+z) = 96$

(3.1.-3.6) Решите систему уравнений:

3.1. $x^2 + 1 = 2y, y^2 + 1 = 2z, z^2 + 1 = 2x$. **3.2.** $x^2 + 2 = 2y, y^2 = 2z, z^2 + 1 = 2x$.

3.3. $x^5 - y^2 = 28, y^5 - z^2 = 28, z^5 - x^2 = 28$ **3.4.** $(x+y)^5 = z, (y+z)^5 = x, (z+x)^5 = y$

3.5. $y^3 = 9x^2 - 27x + 27, z^3 = 9y^2 - 27y + 27, x^3 = 9z^2 - 27z + 27$ **3.6.** $x^3 + y^3 = z, y^3 + z^3 = x, z^3 + x^3 = y$

(4.1.-4.3) Докажите, что при $a, b, c > 0$

4.1. $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ **4.2.** $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$

4.3. Если $abc = 1$, то $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

(5.1.-5.3) Докажите, что при $a, b, c > 0$

5.1. $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$; **5.2.** $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

5.3. (ИМО, 2000). Если $abc = 1$, то $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$.

(6.1.-6.4) Решите уравнение:

6.1. $\sqrt{7x+2} + \sqrt{7x-3} = \sqrt{5x+4} + \sqrt{5x-1}$

6.2. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$

6.3. $\sqrt{2x^2+3x+5} + \sqrt{2x^2-3x+5} = 3x$ **5.4.** $\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+10}} = \frac{x}{3}$

7.1. Докажите, что $3 < \pi < 4$

7.2. Докажите, что если a, b, c, s элементы треугольника $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}$

8.1. Найдите все значения параметра, при котором система неравенств $x \geq (y-a)^2, y \geq (x-a)^2$ имеет только одно решение.

8.2. Найдите все значения параметра, при котором уравнение $1 + \sin^2 ax = \cos x$ имеет единственный корень.