ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

§1. Центроид системы точек

Определение. Точка M называется ***центроидом*** системы точек A_1, $A_2,\ldots A_n$, если выполняется условие

$$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}=\vec{0} \qquad \mathbf{(1)}$$

Равенство (1) с помощью формулы разности двух векторов можно переписать следующим образом:

$$\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MA_2}+\ldots+\overrightarrow{MA_n}=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OM}\right)+\left(\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OM}\right)+\ldots+\left(\overrightarrow{OA_n}-\overrightarrow{OM}\right)=\vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}=\frac{1}{n}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}\right)\ ^{1)} \qquad \mathbf{(2)}$$

Теорема. Если точка M_1 — центроид системы k точек $A_1, A_2, \ldots A_k$, а точка M_2 — центроид системы l точек B_1, B_2, … B_l, и эти системы не имеют общих точек, то центроид системы $k+l$ точек $A_1, A_2, \ldots A_k$, B_1, B_2, … B_l — точка M, принадлежащая отрезку M_1M_2 и делящая его в отношении $M_1M : MM_2 = l:k$.

Доказательство. Пусть точка $M\in\left[M_1M_2\right]$ и $M_1M : MM_2 = l:k$.

Тогда $kM_1M=lMM_2 \Leftrightarrow k\left(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM}_1\right)=l\left(\overrightarrow{OM}_2-\overrightarrow{OM}\right) \Leftrightarrow \frac{k}{k+l}\overrightarrow{OM}_1+\frac{l}{k+l}\overrightarrow{OM}_2$. **(3)**

Согласно формуле (2): $\overrightarrow{OM}_1=\frac{1}{k}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_k}\right)$, $\overrightarrow{OM}_2=\frac{1}{l}\left(\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\ldots+\overrightarrow{OB_l}\right)$.

Подставляя эти выражения для $\overrightarrow{OM}_1$ и $\overrightarrow{OM}_2$ в формулу (3), получаем:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{k+l}\left(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_k}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}+\ldots+\overrightarrow{OB_l}\right).$$

Это и означает, что точка M — центроид системы $k+l$ точек $A_1, A_2, \ldots A_k$, B_1, B_2, … B_l.

Задача 1. Докажите, что медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины тетраэдра.

Задача 2. Середина каждой стороны основания четырехугольной пирамиды соединена отрезком с точкой пересечения медиан противоположной боковой грани. Докажите:

а) эти отрезки пересекаются и точкой пересечения делятся в отношении 3:2, считая от стороны основания;

б) середины этих отрезков являются вершинами параллелограмма. Найдите отношение площади этого параллелограмма к площади основания пирамиды.

Ответ: б) 1:72.

Решение.

1) Пусть точки K_1, K_2, K_3, K_4 — середины сторон основания AB, BC, CD, DA пирамиды $PABCD$, точки M_1, M_2, M_3, M_4 — точки пересечения медиан граней CDP, ADP, ABP, BCP, а точки O_1, O_2, O_3, O_4 делят отрезки $K_1M_1, K_2M_2, K_3M_3, K_4M_4$ в отношении $K_1O_1:O_1M_1=K_2O_2:O_2M_2=K_3O_3:O_3M_3=K_4O_4:O_4M_4=3:2$.

Тогда имеем:

$$\overrightarrow{PO_1}=\frac{2}{5}\overrightarrow{PK_1}+\frac{3}{5}\overrightarrow{PM_1}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PP})=\frac{1}{5}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}).$$

Аналогично $\overrightarrow{PO_2}=\overrightarrow{PO_3}=\overrightarrow{PO_4}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})$.

Таким образом, $\overrightarrow{PO_1}=\overrightarrow{PO_2}=\overrightarrow{PO_3}=\overrightarrow{PO_4}$. Это означает, что точки O_1, O_2, O_3, O_4 совпадают, т.е. отрезки $K_1M_1, K_2M_2, K_3M_3, K_4M_4$ пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:2, считая от стороны основания.

[1)] **Здесь точка *O* — произвольная точка пространства.**

2) Пусть теперь точки E, F, G, H — середины отрезков $K_1M_1, K_2M_2, K_3M_3, K_4M_4$ соответственно.

Тогда: $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{PF}-\overrightarrow{PE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{PK_2}+\overrightarrow{PM_2})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{PK_1}+\overrightarrow{PM_1})=$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})+\frac{1}{3}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PD})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}))=$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{6}\overrightarrow{PC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{PA})=\frac{1}{12}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})=\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$.

Аналогично: $\overrightarrow{HG}=\frac{1}{12}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{FG}=\overrightarrow{EH}=\frac{1}{12}\overrightarrow{BD}$.

Таким образом, точки E, F, G, H не лежат на одной прямой и $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{HG}$. Следовательно, четырехугольник $EFGH$ — параллелограмм.

3) Сравним теперь площади параллелограмма $EFGH$ и четырехугольника $ABCD$.

Обозначим через φ угол между диагоналями AC и BD основания $ABCD$, через S_1 — площадь этого основания, а через S_2 — площадь параллелограмма $EFGH$.

Тогда $S_1=\frac{1}{2}AC\cdot BD\sin\varphi$.

Поскольку $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{12}\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{EH}=\frac{1}{12}\overrightarrow{BD}$, угол между сторонами EF и EH параллелограмма $EFGH$ равен φ или $\pi-\varphi$, а $EF=\frac{1}{12}AC,\ EH=\frac{1}{12}BD$, откуда получаем $S_2=EF\cdot EH\sin\varphi=\frac{1}{12}AC\cdot\frac{1}{12}BD\sin\varphi=\frac{1}{72}S_1$. Таким образом, $S_2:S_1=1:72$.

§2. Условия принадлежности трех точек одной прямой и четырех точек одной плоскости

Теорема 1. Пусть точка C лежит на прямой AB, точка O не лежит на этой прямой и имеет место равенство $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$. Тогда $\alpha+\beta=1$.

Доказательство.

$$C\in AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{OC}=(1-k)\overrightarrow{OA}+k\overrightarrow{OB}. \qquad \textbf{(4)}$$

Поскольку $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ — неколлинеарные векторы, разложение **(4)** единственно и, значит, $\alpha=1-k,\ \beta=k$.

Таким образом $\alpha+\beta=1$, что и требовалось доказать

Теорема 2. Пусть точка D лежит в плоскости ABC, точка O не лежит в этой плоскости и иметь место равенство $\overrightarrow{OD}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}$. Тогда $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Доказательство. Так как векторы $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ компланарны, а векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ неколлинеарны, существуют такие числа m и n, что $\overrightarrow{AD}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}$, откуда получаем

$$\overrightarrow{OD}=(1-m-n)\overrightarrow{OA}+m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}. \qquad \textbf{(5)}$$

Поскольку $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ — некомпланарные векторы, разложение **(5)** единственно и, значит, $\alpha=1-m-n,\ \beta=m,\ \gamma=n$.

Следовательно, $\alpha+\beta+\gamma=1$, что и требовалось доказать

Задача 3. Точки K, L, M и N на сторонах треугольника ABC таковы, что $\frac{AK}{KC}=\frac{CL}{LB}=\frac{BM}{MC}=\frac{1}{2}$, точка N – середина AC. Найдите отношение, в котором точка пересечения отрезков KL и MN делит отрезок KL.

Ответ: $2:3$.

Решение. Обозначим через O точку пересечения отрезков KL и MN и через x — отношение $\frac{KO}{KL}$. Тогда $\overrightarrow{KO} = x\overrightarrow{KL}$. Так как точка L — середина MC и $KN = \frac{1}{4}KC$, то $\overrightarrow{KO} = x\overrightarrow{KL} = x \cdot \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KC}\right) = \frac{x}{2}\left(\overrightarrow{KM} + 4\overrightarrow{KN}\right) = \frac{x}{2}\overrightarrow{KM} + 2x\overrightarrow{KN}$. Поскольку точка O лежит на прямой MN, то $\frac{x}{2} + 2x = 1$, откуда $x = \frac{2}{5}$. Значит, $\frac{KO}{KL} = \frac{2}{5}$, следовательно, $\frac{KO}{OL} = \frac{2}{3}$.

Задача 4. Основание четырехугольной пирамиды — параллелограмм $ABCD$. Точки A_1, B_1, C_1 на PA, PB, PC пирамиды таковы, что $\frac{AA_1}{A_1P} = 2$, $\frac{BB_1}{B_1P} = 5$, $\frac{CC_1}{C_1P} = 10$. В каком отношении плоскость $A_1B_1C_1$ делит боковое ребро PD? ***Ответ*:** $1:7$.

Решение. Обозначим через D_1 точку пересечения плоскости $A_1B_1C_1$ с боковым ребром PD и через x — отношение $\frac{PD_1}{PD}$. Тогда $\overrightarrow{PD_1} = x\overrightarrow{PD}$. $(*)$

По условию $ABCD$ — параллелограмм, следовательно, $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$, **откуда** $\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}$. Но $\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PA_1}$, $\overrightarrow{PB} = 6\overrightarrow{PB_1}$, $\overrightarrow{PC} = 11\overrightarrow{PC_1}$ и $(*)$ принимает вид $\overrightarrow{PD_1} = 3x\overrightarrow{PA_1} + 11x\overrightarrow{PC_1} - 6x\overrightarrow{PB_1}$. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат в одной плоскости, следовательно, $3x + 11x - 6x = 1$, откуда $x = \frac{1}{8}$. Таким образом, $\frac{PD_1}{PD} = \frac{1}{8}$, значит, $\frac{PD_1}{D_1D} = \frac{1}{7}$**.**

§3. Доказательство неравенств

Задача 5. Найдите наименьшее значение выражения $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+9} + \sqrt{c^2+25}$, если известно, что $a + b + c = 12$. **Ответ:** 15.

Решение. Рассмотрим векторы $\vec{m}\{a;1\}$, $\vec{n}\{b;3\}$, $\vec{p}\{c;5\}$ и $\vec{q} = \vec{m} + \vec{n} + \vec{p}$. Вектор $\vec{q}$ имеет координаты $\vec{q}\{a+b+c;\ 9\}$, откуда $\vec{q}\{12; 9\}$.

Поскольку $|\vec{m}| + |\vec{n}| + |\vec{p}| \ge |\vec{m} + \vec{n} + \vec{p}|$, имеем $\sqrt{a^2+1} + \sqrt{b^2+9} + \sqrt{c^2+25} \ge \sqrt{144+81} = 15$.

Равенство достигается, если $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{n} \uparrow\uparrow \vec{p}$, откуда $b = 3a$, $c = 5a$. Учитывая $a + b + c = 12$, получаем $a = \frac{4}{3}$, $b = 4$, $c = \frac{20}{3}$.

Задача 6. Докажите неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$, если a, b, c — длины сторон треугольника ABC, а R — радиус описанной около этого треугольника окружности.

Решение. Согласно теореме синусов $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$. Тогда имеем

$$a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2R^2(2\sin^2 A + 2\sin^2 B + 2\sin^2 C) \le 9R^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 - \cos 2A - \cos 2B - \cos 2C \le 4{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -1{,}5.$$

Докажем, что $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -1{,}5$. Пусть ABC — данный треугольник, точка O — центр описанной около него окружности. Тогда $\angle BOC = 2\angle A$, $\angle AOC = 2\angle B$, $\angle AOB = 2\angle C$. Далее имеем:

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} \ge 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad R^2(1+1+1+\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \ge -1{,}5.$$

Задача 7. Докажите, что, если $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} = 2\sqrt{1+\alpha}$, то $x + y \ge 2\alpha$.

Доказательство. Положим $u = \sqrt{1+x}$, $v = \sqrt{1+y}$, $a = \sqrt{1+\alpha}$. Для u, v, a условием является равенство $u + v = 2a$, где $u \ge 0$, $v \ge 0$, $a \ge 0$, а доказать надо, что $u^2 + v^2 \ge 2a^2$.

Рассмотрим векторы $\vec{m}\{u;v\}$, $\vec{n}\{v;u\}$ и $\vec{q}\{2a;2a\}$. Так как $u + v = 2a$, то $\vec{m} + \vec{n} = \vec{q}$.

Следовательно, $|\vec{m}| + |\vec{n}| \ge |\vec{q}|$, откуда $u^2 + v^2 \ge 2a^2$.

Задача 8. Найдите множество значений функции $f(x)=x-1+\sqrt{6x-3x^2}$.

Ответ: $[-1;\,2]$.

Решение. Область определения функции $f(x)$ — отрезок [0; 2]. Представим функцию $f(x)$ в виде $f(x)=x-1+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2x-x^2}$ и рассмотрим векторы $\vec{a}\{1;\sqrt{3}\}$ и $\vec{b}\{x-1;\sqrt{2x-x^2}\}$. Их скалярное произведение равно $f(x)$, а длины равны соответственно $|\vec{a}|=2$ и $|\vec{b}|=1$. В силу известного неравенства $-|\vec{a}||\vec{b}|\le\vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|$ получаем $-2\le f(x)\le 2$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, если $\frac{x-1}{1}=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{3}}$, откуда $x=\frac{3}{2}$ и, так как число $\frac{3}{2}\in[0;\,2]$, то наибольшее значение функции $f(x)$ равно $|\vec{a}||\vec{b}|=2$.

Так как координаты вектора $\vec{a}$ положительны, а одна из координат вектора $\vec{b}$ неотрицательна, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не могут быть противоположно направлены, но нетрудно заметить, что оба слагаемых ($x-1$ и $\sqrt{6x-3x^2}$) принимают наименьшее значение на отрезке $[0;\,2]$ при $x=0$. Таким образом, $f(0)=-1$ есть наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке [0; 2].

Задача 9. Решите систему
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=4,\\ x^2+xz+z^2=9,\\ y^2+yz+z^2=36.\end{cases}$$

Ответ: Система решений не имеет.

Решение. Выберем точку *O* в некоторой плоскости и отложим в этой плоскости от точки *O* три единичных вектора $\vec{u}$, $\vec{v}$ и $\vec{w}$, которые образуют друг с другом углы $120°$. Пусть *x*, *y*, *z* — решения данной системы. Обозначим соответственно через *A*, *B* и *C* концы векторов $x\vec{u}$, $y\vec{v}$ и $z\vec{w}$. Далее имеем:

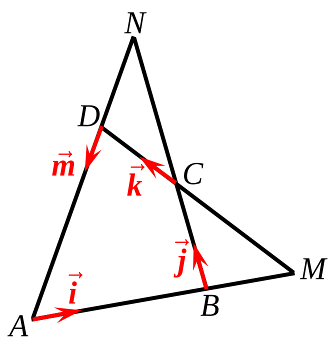
$$AB^2=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)^2=(y\vec{v}-x\vec{u})^2=x^2+y^2-2xy\cos120°=x^2+xy+y^2=4,$$ откуда $AB=2$.

Аналогично, получаем: $AC=3$, $BC=6$.

Таким образом, $AB+AC<BC$, что невозможно.

Задача 10. Пусть *ABCD* — выпуклый четырехугольник, *M* — точка пересечения прямых *AB* и *CD*, *N* — точка пересечения прямых *BC* и *AD*. Докажите, что $\cos\angle BAD+\cos\angle ABC+\cos\angle BCD+\cos\angle ADC+\cos\angle AMD+\cos\angle ANB<2$.

Доказательство. Выберем четыре единичных вектора $\vec{i},\vec{j},\vec{k},\vec{m}$ так, что $\vec{i}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$, $\vec{k}\uparrow\uparrow\overrightarrow{CD}$, $\vec{m}\uparrow\uparrow\overrightarrow{DA}$ и воспользуемся свойством скалярного квадрата вектора
$$\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{m}\right)^2\ge 0.$$



а) Если $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{m}=\vec{0}$, то $AB\parallel CD$ и $BC\parallel AD$, что противоречит условию.

б) Если $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{m}\ne\vec{0}$, то имеем:

$$\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{m}\right)^2=\vec{i}^2+\vec{j}^2+\vec{k}^2+\vec{m}^2+2\cdot\vec{i}\cdot\vec{j}+2\cdot\vec{i}\cdot\vec{k}+2\cdot\vec{i}\cdot\vec{m}+2\cdot\vec{j}\cdot\vec{k}+2\cdot\vec{j}\cdot\vec{m}+2\cdot\vec{k}\cdot\vec{m}=$$
$$=4-2\cos\widehat{ABC}-2\cos\widehat{AMD}-2\cos\widehat{BAD}-2\cos\widehat{BCD}-2\cos\widehat{ANB}-2\cos\widehat{ADC}>0,$$

откуда находим $\cos\widehat{BAD}+\cos\widehat{ABC}+\cos\widehat{BCD}+\cos\widehat{ADC}+\cos\widehat{AMD}+\cos\widehat{ANB}<2$.