Логическое отрицание в школьных и олимпиадных задачах

Панкратьев Антон Евгеньневич

МГУ имени М.В.Ломоносова, Новая Школа
Москва, Россия

IX Открытый семинар учителей математики, 1 мая 2019 года

Построение отрицания

Пусть A и B — некоторые логические утверждения. Тогда

$$\text{не } (A \text{ и } B) \Leftrightarrow (\text{не } A) \text{ или } (\text{не } B)$$

$$\text{не } (A \text{ или } B) \Leftrightarrow (\text{не } A) \text{ и } (\text{не } B)$$

Построение отрицания

Пусть A и B — некоторые логические утверждения. Тогда

не (A и B) $\Leftrightarrow$ (не A) или (не B)

не (A или B) $\Leftrightarrow$ (не A) и (не B)

Пусть $C = C(x)$ — некоторое утверждение, зависящее от x. Тогда

не существует x, при котором верно C $\Leftrightarrow$ для любого x верно (не C)

для любого x верно C $\Leftrightarrow$ не существует x, при котором верно (не C)

Построение отрицания

Пусть A и B — некоторые утверждения.

$$\text{Импликация } A \Rightarrow B \text{ ложна} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ истинно, а } B \text{ ложно.}$$

$$\text{Импликация } A \Rightarrow B \text{ истинна} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ ложно или } B \text{ истинно.}$$

Построение отрицания

Пусть A и B — некоторые утверждения.

$$\text{Импликация } A \Rightarrow B \text{ ложна} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ истинно, а } B \text{ ложно.}$$

$$\text{Импликация } A \Rightarrow B \text{ истинна} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ ложно или } B \text{ истинно.}$$

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — некоторые утверждения.

$$\text{Импликация } A(x) \Rightarrow B(x) \text{ ложна} \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\colon\ A(x) \text{ истинно, а } B(x) \text{ ложно.}$$

Построение отрицания: примеры задач

За круглым столом сидят 12 человек — лжецы и правдолюбцы. Каждый из них произнёс фразу

“Оба мои соседа — лжецы!”

Сколько лжецов может быть за столом на самом деле?

Построение отрицания: примеры задач

Двух пятиклассников и двух шестиклассников из одной школы спросили: “Кто выше: пятиклассники или шестиклассники?” Прозвучали следующие ответы:

- любой шестиклассник выше некоторого пятиклассника;
- один из шестиклассников выше одного из пятиклассников;
- любой шестиклассник выше любого пятиклассника;
- один из шестиклассников выше любого пятиклассника.

Позже выяснилось, что шестиклассники пошутили, а пятиклассники отвечали честно. Можно ли определить, верно ли:

а) первое утверждение;
б) второе утверждение;
в) третье утверждение;
г) четвёртое утверждение?

Построение отрицания: примеры задач

У Пети есть три монеты, две из которых настоящие, а третья, отличающаяся от них по весу, фальшивая. Его весы испортились и всегда показывают неправильный результат (при взвешивании двух монет одинакового веса одна чаша перевешивает другую, а при взвешивании двух монет разного веса или весы находятся в равновесии, или монета с меньшим весом перевешивает монету с бо́льшим весом).

Может ли Петя с помощью таких весов наверняка определить среди этих трёх монет хотя бы одну настоящую?

Построение отрицания: примеры задач

Найдите все натуральные n, при которых арифметическая прогрессия не восстанавливается однозначно по её семнадцатому члену и сумме n первых членов.

Построение отрицания: примеры задач

Найти все a, при которых уравнение

$$(x^2 - (a+1)x + 3(a-2)) \cdot \log_{a-x}(2a - x - 1) = 0$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[-1; 2]$, а вне этого отрезка корней не имеет.

Построение отрицания: примеры задач

Найти все x, которые не являются корнями уравнения

$$4\sqrt{2x^4 + x^3} = a\sqrt[4]{4 - a^4}(x + 4x^2 - 8)$$

ни при каком a.

Построение отрицания: примеры задач

Найдите все значения a, при каждом из которых из равенства

$$y = \sqrt{5 + 4x - x^2} + 2$$

не следует неравенство

$$a \leqslant \sqrt{45 - a^2 + 2ax - x^2} + y.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!