

## Числовые последовательности

### Поиск закономерностей

На этом занятии мы будем рассматривать числа, записанные в строчку в определенном порядке или, иначе говоря, **числовые последовательности**. Для начала попробуем научиться угадывать правило, по которому эти числа следуют одно за другим, а также находить числа, стоящие на определенных местах.

**Пример 1.** Даны последовательности чисел: а) 5, 8, 11, 14, 17, ...; б) 1, 8, 27, 64, 125, ...; в) 1, 2, 6, 24, 120, ...; г) 4, 8, 16, 32, 64, .... Для каждой из них: 1) сформулируйте правило, по которому она составлена, и укажите следующее число; 2) запишите числа, которые будут стоять на десятом и на двадцатом месте.

*Отметим, что ответ на первый вопрос может быть неоднозначным, так как школьники могут увидеть различные закономерности. При этом, имеет смысл обсуждать наиболее очевидные.*

**Решение.** а) 1) Заметим, что **каждое следующее число на 3 больше чем предыдущее**, тогда следующим будет число 20. 2) Так как число 20 будет шестым, то, постепенно прибавляя по 3, получим, что на десятом месте стоит число 32. Можно таким же образом искать число, стоящее на двадцатом месте, но это не очень удобно. Имеет смысл рассуждать так: сколько раз надо прибавить по 3, чтобы из первого числа получить двадцатое? Это надо сделать 19 раз, поэтому двадцатое число равно  $5 + 19 \cdot 3 = 62$ .

б) 1) Заметим, что  $1 = 1^3$ ,  $8 = 2^3$ ,  $27 = 3^3$ ,  $64 = 4^3$ ,  $125 = 5^3$ , то есть **каждое число – это номер места, на котором оно стоит, возведенный в куб**. Значит, следующее число:  $6^3 = 216$ . 2) Десятое число равно  $10^3 = 1000$ , а двадцатое – это  $20^3 = 8000$ .

в) 1) Заметим, что второе число получается из первого умножением на 2, третье получается из второго умножением на 3, четвертое из третьего – умножением на 4, и так далее, то есть **каждое число получается из предыдущего умножением на номер места, на котором оно стоит**. Значит, следующее число:  $120 \cdot 6 = 720$ . 2) Десятое число получается из девятого умножением на 10, девятое – из восьмого умножением на 9, и так далее. Значит, десятое число – это **произведение всех натуральных чисел от 1 до 10**. Такое произведение принято записывать так:  $10!$  (*читается: десять факториал*), причем вычислять это произведение особого смысла не имеет. Аналогично, двадцатое число – это  $30!$  (*тридцать факториал*).

г) 1) **Каждое число получается из предыдущего умножением на 2**, поэтому следующим будет число 128. 2) Для ответа на этот вопрос полезно записать данную последовательность чисел иначе:  $2^2$ ;  $2^3$ ;  $2^4$ ;  $2^5$ ;  $2^6$ , ... и тогда закономерность, по которой она составлена, можно сформулировать по-другому: **каждое число является степенью двойки, показатель которой на единицу больше, чем номер места, на котором оно стоит**. Тогда можно увидеть, что десятое число равно  $2^{11}$ , а двадцатое – это  $2^{21}$ .

**Ответ:** а) 1) 20; 2) 32 и 62; б) 1) 216; 2) 1000 и 8000; в) 1) 120; 2)  $10!$  и  $20!$ ; г) 128; 2)  $2^{11}$  и  $2^{21}$ .

В рассмотренном примере мы встретились с двумя видами правил, по которым могут быть построены последовательности: в пункте а) каждый **член последовательности** определяется, исходя из предыдущего, а в пункте б) он определяется, исходя из своего порядкового номера. В пунктах в) и г) предъявлены последовательности, которые можно задать как тем, так и другим способом.

*Понятно, что последовательность пункта а) также можно задать, исходя из номера и первого члена, но обсуждать это на данном этапе, скорее всего, преждевременно. При этом, полезно обсудить на более простых примерах, что разные правила могут задавать одну и ту же последовательность.*

**Пример 2.** Саша и Маша записали в ряд по 20 чисел. Саша начал с единицы и придумал такое правило: на втором месте – разность между первым числом и числом 3, на третьем – сумма второго числа и числа 5, затем – разность третьего и числа 7, потом сумма четвертого и числа 9, и так далее. Маша поступила проще: записала последовательные

натуральные числа от 1 до 20, а затем у каждого четного числа поменяла знак на противоположный. Какие ряды чисел у них получились: разные или одинаковые?

**Решение.** Непосредственным вычислением можно убедиться, что ряд чисел Саши выглядит так: 1, -2, 3, -4, 5, -6, ..., 19, -20. Очевидно, что у Маши получился такой же ряд.

**Ответ:** одинаковые.

Встречаются последовательности, в которых угадать правило, по которым она построена, и найти недостающие члены, весьма не просто, и помогают в этом не только предыдущие, но и последующие члены.

**Пример 3.** Дана последовательность, в которой пропущено ровно пять чисел: 102; 105; 111; 114; 120; 123; 129; \_; \_; \_; \_; \_; 201; 204; 210; 213; 219. Вставьте пропущенные числа.

**Решение.** Для того чтобы восстановить пропущенные числа, необходимо заметить, что каждый член данной последовательности начиная со второго получается в результате сложения предыдущего члена и суммы его цифр:  $105 = 102 + 3$ ;  $111 = 105 + 6$ ; и так далее. Таким образом, искомые числа:  $141 = 129 + 12$ ;  $147 = 141 + 6$ ;  $159 = 147 + 12$ ;  $174 = 159 + 15$ ;  $186 = 174 + 12$ .

**Ответ:** пропущены числа 141; 147; 159; 174; 186.

*Отметим, что, на первый взгляд, существует более простая закономерность: каждое число, стоящее на четном месте, на 3 больше, чем предыдущее число, а каждое число, стоящее на нечетном месте – на 6 больше, чем предыдущее. Эту закономерность использовать не удастся: если вставить числа 132, 138, 141, 147 и 150, то следующим числом должно быть 156, а не 201.*

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Сформулируйте правило, по которому составлена каждая последовательность, найдите следующее число и число, стоящее на десятом месте: а) 3, 6, 9, 12, 15; ... ; б) 20, 15, 10, 5, 0, -5, ...; в) 1024, 512, 256, 128, 64, ...; г) 10, 8, 11, 9, 12, 10, ...; д) 2, 5, 10, 17, 26 ...; е)  $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}, \dots$ ; ж)  $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, \frac{1}{3}, \frac{16}{81}, \frac{25}{243}, \dots$ ; з) 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ....

**Ответ:** а) каждое число получается из предыдущего прибавлением числа 3 (каждое число равно своему утроенному порядковому номеру); следующее число: 18, а десятое число: 30;

б) каждое число получается из предыдущего вычитанием числа 5; следующее число: -10, а десятое число: -25;

в) каждое число в два раза меньше предыдущего; следующее число: 32, а десятое число: 1;

г) на нечетных местах расположен ряд последовательных натуральных чисел, начиная с числа 10, а на четных местах – ряд последовательных натуральных чисел, начиная с числа 8; следующее число: 13, а десятое число: 12;

д) разность между соседними числами с каждым шагом увеличивается на 2, то есть шестое число больше пятого на 11; следующее число: 37, а десятое число: 101;

е) используя основное свойство дроби приведем все дроби к знаменателю 12, тогда числители дробей – последовательные натуральные числа, начиная с 2; следующее число:  $\frac{7}{12}$ , а десятое число:  $\frac{11}{12}$ ;

ж) каждое число – это дробь, числителем которой является квадрат его порядкового номера, а знаменателем – степень тройки с показателем, равным номеру; следующее число:  $\frac{36}{729} = \frac{4}{81}$ , а десятое число:  $\frac{100}{3^{10}}$ ;

з) каждое число, начиная с третьего, является суммой двух предыдущих; следующее число: 21, а десятое число: 55.

2. Петя, Вася и Коля записали в ряд по 100 чисел. У Пети пятое число равно 12, и каждое число, начиная со второго, на два больше левого соседа. У Васи первое и третье число равны 4 и 6 соответственно, а каждое число, кроме крайних, вдвое меньше суммы его соседей. А Коля просто записывал периметры прямоугольников шириной в одну клетку: сначала – периметр прямоугольника длиной в одну клетку, потом – длиной в две клетки, и так далее (сторона каждой клетки равна 1). У кого из мальчиков совпали записанные ряды чисел?

**Ответ:** совпали ряды Пети и Коли.

**Решение.** Найдем первые четыре числа в Петинем ряду. Так как каждое число, начиная со второго, на два больше левого соседа, то четвертое число – это 10, третье – 8, второе – 6, первое – 4. Ряд Васи отличается от Петинего, так как его второе число равно  $(4 + 6) : 2 = 5$ . В Колином ряду первое число – это 4, а периметр каждого следующего прямоугольника на 2 больше, чем периметр предыдущего. Значит, его ряд совпадет с Петиним.

3. На прямой отметили 100 точек так, что расстояние между любыми соседними точками равно 7.

а) Каково расстояние между крайними точками?

б) Точки пронумеровали по порядку слева направо. Какой номер имеет точка, расстояние от которой до первой равно 77?

в) Координата первой точки равна 10. Найдите координату тридцать первой точки.

г) Какой номер будет иметь точка с координатой 110, если координата первой точки равна 5?

**Ответ:** а) 693; б) 12; в) 220; г) 16.

**Решение.** а) Между крайними точками 99 промежутков длины 7, поэтому искомое расстояние равно  $7 \cdot 99 = 693$ .

б) Между этими точками  $77 : 7 = 11$  промежутков длины 7, поэтому искомый номер равен  $1 + 11 = 12$ .

в) Между первой и тридцать первой точкой 30 промежутков длины 7, значит, расстояние между ними равно  $7 \cdot 30 = 210$ , а искомая координата равна  $10 + 210 = 220$ .

г) Расстояние между этими точками равно  $110 - 5 = 105$ , значит, между ними  $105 : 7 = 15$  промежутков длины 7. Следовательно, искомый номер равен  $1 + 15 = 16$ .

4. Дана последовательность: 1,5; 1,65; 1,8; 1,95; ...

а) Укажите закономерность и найдите число, стоящее на сто первом месте.

б) На каком месте в этой последовательности стоит число 6?

**Ответ:** а) 16,5; б) 31.

**Решение.** а) Каждое число, начиная со второго, больше предыдущего на 0,15. По аналогии с решениями 1.2 а, в получим, что между первым и сто первым числами 100 промежутков длины 0,15. Следовательно, сто первое число равно  $1,5 + 0,15 \cdot 100 = 16,5$ .

б) Расстояние между числами 1,5 до 6 равно  $6 - 1,5 = 4,5$ . Значит, между ними  $4,5 : 0,15 = 30$  промежутков длины 0,15. Следовательно число 6 имеет номер 31. (Сравните с решениями 2 б, г.)

5. Найдите закономерность в последовательности чисел 111, 213, 141, 516, 171, 819, 202, 122, ... и запишите следующие два числа.

**Ответ:** 232, 425.

**Решение.** Записаны без пробелов двузначные числа, начиная с 11, после чего каждые три цифры отделены запятыми.

6. Найдите закономерность и следующий член последовательности: 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, ...

**Ответ:** 286.

**Решение.** Найдем разности соседних членов данной последовательности. Получим новую последовательность: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ... Эту же операцию сделаем с полученной последовательностью: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ... . В этой последовательности следующее число – это 11. Тогда следующий член исходной последовательности восстанавливается «обратным ходом»:  $11 \rightarrow 66 \rightarrow 286$ .

	1	2	3	4	...
1	1	2	3	4	
2	2	4	6		
3	3	6			
4	4				
					...

Отметим, что: 1) заданная последовательность чисел представляет собой суммы чисел в диагоналях таблицы умножения (см. таблицу); 2) последовательность 1, 3, 6, 10, ..., полученная после первой операции, называется последовательностью треугольных чисел.

7. Даны две последовательности 2, 4, 8, 16, 14, 10, 2, 4, ... и 3, 6, 12, 6, 12, ... . В них каждое число получено из предыдущего по одному и тому же закону. а) Укажите этот закон. б) Найдите все последовательности натуральных чисел, построенные по этому же закону, все члены которых равны между собой. в) Докажите, что если такая последовательность начинается с  $2^{1000}$ , то в ней рано или поздно появится однозначное число.

**Ответ:** б) 18, 18, ... .

**Решение.** а) Каждый член последовательности равен удвоенной сумме цифр предыдущего.

б) Очевидно, что однозначное число не может подчиняться описанному закону. Также заметим, что такому закону не может подчиняться число, в котором больше двух знаков, так как уже для трехзначного числа удвоенная сумма цифр не превосходит 54. Следовательно, повторяющимся членом искомой последовательности может быть только двузначное число  $\overline{ab}$ . Тогда  $10a + b = 2(a + b)$ , то есть  $8a = b$ , откуда  $a = 1$ ;  $b = 8$ .

в) Заметим, что пока нет однозначных чисел, каждый член последовательности меньше предыдущего. Кроме того, среди ее членов не может быть числа 18, так как ни один из ее членов не делится на 3. Действительно,  $2^{1000}$  не делится на 3, поэтому на 3 не делится сумма его цифр, тогда и сумма цифр получившегося числа не делится на 3, и так далее.

**Д1.** Найдите номер парковки, занятой машиной (см. рисунок).

**Д2.** Дана последовательность 4, 3, 3, 6, 4, 5, 4, 6, 6, 6, 11, ... Угадайте правило, по которому она составлена и найдите: а) следующее число; б) двадцать первое число; в) сотое число.

