

XV Южный математический турнир.

Гранд-лига (10-11 кл).

III тур. 19.10.2020.

1. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Рассматривается переменная дуга окружности Ω , проходящая через точки A и D и лежащая в той полуплоскости относительно AD , которая не содержит четырёхугольник $ABCD$. Прямые, проходящие через B и C , касаются Ω в точках X и Y соответственно, причем луч BA лежит внутри угла XBD , а луч CD лежит внутри угла YCA . Докажите, что прямая XY проходит через фиксированную точку, не зависящую от Ω .
2. Пусть $ABCDE$ – выпуклый пятиугольник, A_1 – точка пересечения диагоналей четырёхугольника $BCDE$, аналогично определяются точки B_1, C_1, D_1, E_1 . Известно, что три из прямых $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1$ пересекаются в одной точке. Докажите, что все пять прямых пересекаются в одной точке.
3. С замкнутой ломаной $A_1A_2 \dots A_n$ можно проделать операцию — провести диагональ вида $A_{i-1}A_{i+1}$ (вершины нумеруются циклически по модулю n) и заменить A_i на точку A'_i , симметричную A_i относительно прямой $A_{i-1}A_{i+1}$. Операция называется *корректной*, если из несамопересекающейся ломаной $A_1A_2 \dots A_n$ получается также несамопересекающаяся ломаная $A_1A_2 \dots A'_i \dots A_n$. Верно ли утверждение: „для любого n из любой несамопересекающейся замкнутой ломаной $A_1A_2 \dots A_n$ несколькими корректными операциями можно получить границу выпуклого n -угольника“?

4. В городе живут 2020 человек, 2 из которых (А и В) баллотируются в мэры. Голосуют все жители по заранее известной очереди, причём начинается голосование с того, что каждый кандидат голосует за себя. У каждого из остальных жителей города есть своё иррациональное число a . Каждый знает результаты голосования к моменту, когда он голосует и: если доля голосов за А меньше a , он голосует за А, иначе за В. Статист, зная a для каждого жителя, заранее предсказывает исход выборов, называя процент голосов, поданных за А. С какой наибольшей точностью статист гарантированно может предсказать исход выборов (в %)? (Точность — это модуль разности между прогнозом и истинным результатом.)

5. Даны положительные вещественные числа a, b, c, d . Найдите максимальное значение выражения

$$f(x) = \frac{a + bx}{b + cx} + \frac{b + cx}{c + dx} + \frac{c + dx}{d + ax} + \frac{d + ax}{a + bx},$$

для неотрицательных x .

6. Натуральные числа a, b, c таковы, что $\text{НОД}(a, b, c) = 1$ и они являются длинами сторон некоторого треугольника. При этом числа

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a + b - c}, \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b + c - a}, \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c + a - b}$$

также целые. Докажите, что одно из чисел

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b), \quad 2(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

является точным квадратом.

7. Дана таблица с тремя строками и 100 столбцами. Изначально в левой клетке каждой строки стоит $400 \cdot 3^{100}$ фишек. За один ход Петя отмечает некоторые фишки в таблице (хотя бы одну), а Вася выбирает одну из трех строк. После этого все отмеченные фишки в выбранной строке сдвигаются на клетку вправо, а все отмеченные фишки в других строках удаляются из таблицы. Петя выигрывает, если одна из фишек выходит за правый край таблицы; Вася выигрывает, если все фишки удалены. Кто выигрывает при правильной игре?
8. Для $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\tau(n)$ количество натуральных делителей числа n . Докажите, что существует несчётное множество функций $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ таких, что $f(f(n)) = \tau(n)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.