Пятнадцатый Южный математический турнир

Онлайн, 15-21.10.2020

Юниор-лига. 3 тур. 19 октября 2020 г.

1. На стороне AB треугольника ABC лежит точка D. Точка I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к AB пересекает прямые AI и BI в точках P и Q соответственно. Описанная окружность треугольника ADP пересекает AC в точке $E \neq A$, описанная окружность треугольника BDQ пересекает BC в точке $F \neq B$, кроме того, эти две окружности пересекаются в точке $K \neq D$. Докажите, что точки E, F, K и I лежат на одной окружности.

2. У 66 гномов есть всего 111 шляп 66 разных цветов. Каждый день гномы выходят на работу в шляпах 66 разных цветов (гном может надевать любую из своих шляп). Оказалось, что каждые два дня отличались набором шляп у гномов (то есть хотя бы один гном выходил в эти дни в разных шляпах). Какое наибольшее количество дней это могло продолжаться?

3. Петя и Вася играют в следующую игру. Сначала Вася предлагает множество клеток клетчатой плоскости, связное относительно переходов в соседнюю по стороне клетку. Затем Петя и Вася по очереди закрашивают несколько клеток в этом множестве, Петя закрашивает по три клетки в форме уголка, а Вася по четыре клетки в форме квадрата 2×2. Закрашивать клетки второй раз нельзя, тот кто не может сделать очередной ход, проиграл. Каждый игрок должен сделать, как минимум, 2020 ходов. Может ли Вася обеспечить себе победу?

4. Вася написал по 10 красных и синих натуральных чисел. Сумма всех чисел равна 2020. Каждую минуту Вася стирает одно из чисел, причем если стирает синее, то все красные уменьшаются на 1. А если стирает красное, то все синие уменьшаются на 1. В конце концов Вася стер все свои числа. Чему равна сумма тех чисел, которые он стирал?

5. Биссектрисы углов A и D выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Докажите, что если $\angle APB = \angle CPD$, то $AB + BD = AC + CD$.

6. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2020}^2) - (a_1a_3 + a_2a_4 + \cdots + a_{2018}a_{2020}),$$

если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – целые числа и $1 = a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{2019} = 99$?

7. Найдите все тройки натуральных чисел a, b, c, для которых $(a + 2b)(b + 2c)(c + 2a)$ – степень простого числа.

8. Докажите, что для некоторого натурального m ни один член последовательности (a_n), заданной условиями $a_1 = m$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ при всех $n \geqslant 1$, не делится ни на один из предыдущих 2020 членов.