

XV Южный математический турнир.  
Командная олимпиада. 15.10.2020.  
Гранд-лига (10-11 кл). I часть.

**ВНИМАНИЕ!** Время на решение задач I части: 9.30 — 11.00.

Сканирование/фотографирование работ и их отправка на адрес [orlyonok@adygmath.ru](mailto:orlyonok@adygmath.ru) в 11.00-11.15. Работы, присланные после 11.15 не проверяются! Пожалуйста, проверьте, что файлы с вашими решениями читаются!

Задачи 1–6 проверяются только ПО ОТВЕТУ. В задачах 7, 8 требуется ПОЛНЫЙ ТЕКСТ РЕШЕНИЯ.

### ЗАДАЧИ.

- (3 балла) В группе  $n$  детей. В каждой паре детей хотя бы один послал другому SMS. Оказалось, что для каждого ребёнка среди тех, кому он послал SMS, ему послали SMS ровно 25%. Возможно ли это при а)  $n = 36$ ? б)  $n = 37$ ? в)  $n = 38$ ?
- (3 балла) Среди вершин правильного 17-угольника выбирают тройку вершин. Сколько способов выбрать её так, чтобы треугольник с этими тремя вершинами был остроугольным?
- (3 балла) Дан треугольник  $ABC$  со сторонами 15, 20, 25. Найдите расстояние между его центром вписанной окружности и центром вписанной окружности треугольника с вершинами в серединах сторон треугольника  $ABC$ .
- (3 балла) Последовательность  $\{a_n\}$  задана условиями  $a_1 = 10$ ,  $a_{n+1} = \frac{n+2}{n} \cdot (a_n - 1)$  при всех натуральных  $n$ . Найдите  $a_{100}$ .
- (3 балла) Найдите наибольшее натуральное число, не превосходящее  $1\underbrace{0000\dots0}_{99 \text{ нулей}}5$ , не представимое в виде суммы трех квадратов целых чисел.
- (3 балла) Дано уравнение  $x^{10} + 7x + 1 = 0$ . Найдите сумму девятой степени всех его комплексных корней.
- (7 баллов) Дан треугольник  $ABC$ . Пусть точка  $C'$  на стороне  $AB$  такова, что отрезок  $CC'$  делит треугольник на два треугольника с равными радиусами вписанных окружностей. Обозначим через  $t_c$  длину отрезка  $CC'$ . Аналогично определим  $t_a$  и  $t_b$ . Выразите площадь треугольника  $ABC$  через  $t_a, t_b, t_c$ .
- (7 баллов) При каком наименьшем натуральном  $n$  существует многочлен  $f$  степени  $n$  такой, что последовательность из 200 чисел  $f(1), f(2), f(3), \dots, f(200)$  является непостоянной геометрической прогрессией?