XV ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР
Лига «Старт» (8 класс).
19 октября 2020. Третий тур.

1. Найдите все положительные целые числа N, которые имеют не менее 4 натуральных делителей, и при этом сумма квадратов 4 наименьших натуральных делителей числа N равна N.

2. Действительные числа a, b, c, x, y таковы, что $a^2 + b^2 + c^2 = x^2 + y^2 = 1$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $(ax + by)^2 + (bx + cy)^2$.

3. Из вершин B и C треугольника ABC проведены высоты BB_1 и CC_1, а также отрезки BB_2 и CC_2, каждый из которых делит периметр треугольника ABC пополам. Известно, что $BB_1 + BB_2 = CC_1 + CC_2$. Верно ли, что $AB = AC$?

4. Петя и Вася играют в следующую игру. Сначала Вася предлагает множество клеток клетчатой плоскости, связное относительно переходов в соседнюю по стороне клетку. Затем Петя и Вася по очереди закрашивают несколько клеток в этом множестве, Петя закрашивает по три клетки в форме уголка, а Вася по четыре клетки в форме квадрата 2×2. Закрашивать клетки второй раз нельзя, тот кто не может сделать очередной ход, проиграл. Каждый игрок должен сделать, как минимум, 2020 ходов. Может ли Вася обеспечить себе победу?

5. Вася написал по 10 красных и синих натуральных чисел. Сумма всех чисел равна 2020. Каждую минуту Вася стирает одно из чисел. При этом, если он стирает синее, то все оставшиеся красные уменьшаются на 1, а если стирает красное, то все оставшиеся синие уменьшаются на 1. В конце концов Вася стёр все свои Чему может равняться сумма тех чисел, которые он стирал?

6. В остроугольном треугольнике основание каждой высоты спроектировали на две другие стороны треугольника. Докажите, что полученные таким образом шесть точек лежат на одной окружности.

7. У папы есть машина, а у трёх его сыновей – по велосипеду. В багажник машины можно загрузить один велосипед. Им нужно вместе с машиной и всеми велосипедами попасть из пункта A в пункт B. За какое наименьшее время они смогут это сделать, если скорость машины 100 км/ч, велосипеда — 20 км/ч, а расстояние между A и B равно 50 км?

8. Незнайка расставил в вершинах куба 8 различных натуральных чисел так, что произведение всех чисел на каждой грани одно и то же, и выписал на доску наибольшее из этих восьми чисел. Найдите наименьшее число, которое могло оказаться на доске?