

# ХV ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ТУРНИР

Лига «Старт» (8 класс).

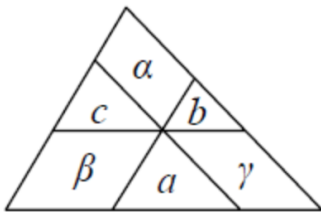
16 октября 2020. Первый тур.

1. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $L$  и  $K$  соответственно так, что  $\angle KAC = 80^\circ$ ,  $\angle LCB = 30^\circ$ . Найдите угол  $LKA$ , если  $\angle ABC = 10^\circ$ , а  $\angle BCA = 70^\circ$ .

2. Найдите все такие числа  $d$ , что для любых чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , удовлетворяющих неравенствам  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$  и  $a + b > c$ , выполняется неравенство  $(a+d)(b+d) > c+d$ .

3. На витрине ювелирного магазина лежали 10 алмазов с массами 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30 карат. Один алмаз был похищен. Всегда ли массу похищенного алмаза можно установить с помощью оставшихся алмазов и чашечных весов без гирь?

4. Граф  $G$  обладает следующим свойством: для любой четвёрки различных вершин  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , если существуют рёбра  $AB$  и  $CD$ , то между этими вершинами есть ещё хотя бы одно ребро. Какое максимальное количество вершин может быть в этом графе, если степень каждой вершины не превышает 3?



5. Прямые, параллельные сторонам треугольника, разбивают его на три параллелограмма с площадями  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и три треугольника с площадями  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (см. рисунок). Найдите наименьшее возможное значение суммы:

$$\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma}$$

6. Произведение  $(1^2+1)(2^2+1)\dots(n^2+1)$  делится на квадрат простого числа  $p$ . Докажите, что  $p < 2n$ .

7. В каждой клетке квадрата  $7 \times 7$  стоит число 2. Какое наименьшее количество чисел надо изменить так, чтобы сумма четырёх чисел, стоящих в любом квадрате  $2 \times 2$ , не делилась на 2 и сумма девяти чисел, стоящих в любом квадрате  $3 \times 3$ , не делилась на 3?

8. На полке стоят  $n > 1$  книг, каждые две из которых имеют разную толщину и высоту. Книги расположены в порядке возрастания высоты. Вася может поменять местами любые две стоящие рядом книги, если левая из них толще и ниже, чем правая. Докажите, что вне зависимости от порядка Васиных действий через конечное число шагов Вася будет вынужден прекратить свою деятельность и книги будут стоять в порядке возрастания толщины.