IV Южно-Российская
математическая олимпиада «Ассара»
Майкоп, 24–28 октября 2025 года.

Младшие. День 1.
25 октября 2025 года.

1. В классе учатся мальчики и девочки. Учителю рассадил их за парты так, что пар «мальчик-девочка» столько же, сколько пар «мальчик-мальчик», а пар «девочка-девочка» в два раза больше, чем пар «мальчик-мальчик». Докажите, что этот класс можно рассадить за парты так, чтобы пар «девочка-девочка» оказалось в три раза меньше, чем пар «мальчик-девочка».

2. Можно ли числа от 1 до 100 разбить на две группы по 50 чисел так, чтобы сумма произведений чисел в группах заканчивалась на цифру 9?

3. Дана клетчатая доска 7×7. Ралина загадала на ней некоторый клетчатый квадрат. Максим пытается угадать его размер (т.е. длину стороны). За один вопрос Максим указывает 7 клеток и получает (правдивый) ответ на вопрос «сколько из этих 7 клеток попало в квадрат Ралины?».
а) Известно, что Ралина загадала либо квадрат 3×3, либо квадрат 4×4. Сможет ли Максим гарантированно угадать размер её квадрата за один вопрос?
б) Известно, что Ралина загадала квадрат любого размера $k \times k$, где $1 \leqslant k \leqslant 7$. Сможет ли Максим задать три вопроса, затем получить на них ответы, после чего по этим ответам гарантированно угадать размер квадрата? (Обратите внимание: положение квадрата Ралины Максиму угадывать не требуется.)

4. а) Дан прямоугольник. Карина и Мадина выбрали точки K и M, лежащие внутри этого прямоугольника. Сумма расстояний от точки K до всех вершин прямоугольника оказалась равной k, а сумма расстояний от точки M до всех вершин прямоугольника оказалась равной m. Докажите, что $k \leqslant 2m$.
б) Решите ту же задачу для произвольного параллелограмма (а не только для прямоугольника).

Время на работу $3\frac{1}{2}$ часа.
Каждая задача оценивается из 7 баллов.

**IV Южно-Российская
математическая олимпиада «Ассара»
Майкоп, 24–28 октября 2025 года.**

**Старшие. День 1.
25 октября 2025 года.**

1. На координатной плоскости провели пять различных прямых $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, $y = k_3x + b_3$, $y = k_4x + b_4$, $y = k_5x + b_5$. Оказалось, что они все проходят через одну точку. Докажите, что пять прямых $y = b_1x + k_1$, $y = b_2x + k_2$, $y = b_3x + k_3$, $y = b_4x + k_4$, $y = b_5x + k_5$ либо все проходят через одну точку, либо все параллельны.

2. Числа 1, 2, 3, $\ldots$, 127 разбили на две группы. Может ли сумма произведений в этих группах оканчиваться ровно а) 10 нулями; б) 30 нулями?

3. Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Пусть отрезки BE и CF пересекают отрезок AD в точках P и Q соответственно; при этом точка P оказалась на отрезке AQ. Окружности (BQE) и (CPF) пересекают прямую AD вторично в точках R и S соответственно. Докажите, что $RA = SD$.

4. Дана клетчатая доска 2025×2025. Ралина загадала на ней некоторый клетчатый квадрат. Максим пытается угадать его размер (т. е. длину стороны). Максим указывает k подмножеств по 2025 клеток, а затем про каждое из этих подмножеств получает (правдивый) ответ на вопрос «сколько из клеток этого множества попало в квадрат Ралины?». При каком наименьшем k Максим гарантированно сможет узнать размер квадрата Ралины?
(Обратите внимание: (1) Максим сначала указывает ВСЕ множества, а потом получает ВСЕ ответы (про каждое из них); (2) положение квадрата Ралины Максиму угадывать не требуется.)

Время на работу 4 часа.
Каждая задача оценивается из 7 баллов.