IV Южно-Российская
математическая олимпиада «Ассара»
Майкоп, 24–28 октября 2025 года.

ACCAPA

Младшие. День 2.
26 октября 2025 года.

5. По кругу лежат 30 мячей — красные, синие, белые, зелёные и жёлтые. Мячи всех цветов встречаются. Оказалось, что справа от красного мяча всегда лежит синий, справа от синего — всегда белый, справа от жёлтого — тоже всегда белый, справа от зелёного — жёлтый. А справа от белого может лежать красный или зелёный мяч. Известно, что всего синих мячей — 8 штук. Найдите количество зелёных мячей.

6. Точка C лежит на биссектрисе угла ASB. Точка D лежит на отрезке SA, а точка E — на отрезке SC. Известно, что $SE = DE = BE = CD$ и $SC = AC$. Докажите, что точка C лежит на отрезке AB.

7. У Галии было четыре десятизначных числа, сумма которых — точный квадрат. Подбежал Марк и приписал к каждому из них по две ненулевые цифры в конец. Докажите, что сумма полученных четырёх 12-значных чисел не является точным квадратом.

8. В стране между некоторыми парами городов есть односторонние авиалинии, при этом известно, что из любого города можно долететь до любого другого. Стоимость одного перелёта равна 1 рубль. Для любых двух городов М и Н известно, что если есть маршрут из города М до города Н ровно за 20 рублей, то найдется другой маршрут из М в Н ровно за 13 рублей (возможно, города М и Н совпадают; допускаются маршруты, в которых одна и та же авиалиния используется больше одного раза). Алиса вылетела из города А и, потратив ровно 300 рублей на перелёты, снова вернулась в А. Докажите, что Боб сможет, вылетев из своего города Б, потратить ровно 300 рублей на перелёты и снова вернуться в Б.

Время на работу $3\frac{1}{2}$ часа.
Каждая задача оценивается из 7 баллов.

IV Южно-Российская математическая олимпиада «Ассара»
Майкоп, 24–28 октября 2025 года.

Старшие. День 2.
26 октября 2025 года.

5. По кругу лежат 30 мячей — красные, синие, зелёные и жёлтые. Мячи всех цветов встречаются. Оказалось, что справа от красного мяча всегда лежит синий, справа от жёлтого — всегда зелёный, справа от синего — тоже всегда зелёный. А справа от зелёного мог оказаться красный или жёлтый мяч. Известно, что красных мячей 8. Найдите количество жёлтых мячей.

6. Диагонали выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Известно. что $\angle AEB = 30^\circ$. Докажите, что расстояние между центрами окружностей (ABE) и (CDE) не превосходит $AB + CD$.

7. Для положительных чисел a, b и c докажите неравенство:

$$\frac{a^2+a}{b+1} + \frac{b^2+b}{c+1} + \frac{c^2+c}{a+1} \geqslant \frac{ab+b}{b+1} + \frac{bc+c}{c+1} + \frac{ca+a}{a+1}.$$

8. Будем говорить, что два различных натуральных числа образуют *красивую пару*, если их произведение делится на их сумму. Будем называть два различных натуральных числа $a > 2$, $b > 2$ *связанными*, если найдется последовательность из нескольких натуральных чисел, в которой любые два соседних числа образуют красивую пару, а также первое число которой равно a, а последнее число равно b. Верно ли, что любые два натуральных числа, большие двух, являются связанными?

Время на работу 4 часа.
Каждая задача оценивается из 7 баллов.